INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIII. BAND FÜNFTES HEFT 1955

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 10,40

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber
Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101
oder an die Herren
Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN
einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Schaefer, H., Über das Verfahren von *Baranow* und seine Erweiterung auf die Ermittlung der Eigenschwingungsformen von Schwingerketten. Mit 11 Textabbildungen 307

Falk, S., Die Abbildung eines allgemeinen Schwingungssystems auf eine einfache Schwingerkette. Mit 18 Textabbildungen 314

Fuhrke, H., Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls. Mit 13 Textabbildungen 329

Woinowsky-Krieger, S., Über ein Verfahren zur Bestimmung der Biegemomente von Platten unter Einzellasten. Mit 3 Textabbildungen 349

Mettler, E., Nichtlineare Schwingungen und kinetische Instabilität bei Saiten und Stäben. Mit 6 Textabbildungen 354

Pöschl, Th., Über eine mögliche Verbesserung der *Ritz*schen Methode. Mit 2 Textabbildungen 365

Jindra, F., Reine ebene Biegung bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz. Mit 6 Textabbildungen 373

INGENIEUR-ARCHIV

XXIII. BAND FÜNFTES HEFT 1955

Über das Verfahren von *Baranow* und seine Erweiterung auf die Ermittlung der Eigenschwingungsformen von Schwingerketten

Von H. Schaefer

1. Einführung. Das Verfahren von *Baranow* für die Ermittlung der Torsionseigenfrequenzen einer Maschinenwelle findet man in *Klotters* großem zusammenfassenden Bericht[1] ausführlich besprochen. Da ein Beweis für die Exaktheit dieses Verfahrens nicht bekannt geworden war (1949), wird es dort mit Vorsicht als Näherungsverfahren von erstaunlich guter Genauigkeit gewertet. Daß aber der Grundgedanke des *Baranow*schen Verfahrens, nämlich die im nächsten Abschnitt zu besprechende Reduktion, durchaus als exakt angesprochen werden muß, hat 1952 *Haug*[2] betont. Er teilt die ersten Schritte eines sehr umfangreichen Beweises mit, dessen Ausgestaltung für eine spätere Veröffentlichung geplant ist. In einer durch die Lektüre des *Haug*schen Buches angeregten Arbeit[3] konnte ich 1953 einen anderen, vollständigen Beweis für die Exaktheit der *Baranow*schen Reduktion geben. Ferner wurde darauf aufmerksam gemacht, daß man den *Baranow*schen Konstruktionen mit nur geringer Mühe sämtliche Eigenschwingungsformen entnehmen kann. Zweck der vorliegenden Arbeit soll sein, diese Erweiterung des *Baranow*schen Verfahrens, die ich seit zwei Jahren in Übungen habe erproben lassen, bekannt zu machen. Dabei ließ sich nicht vermeiden, eine ausführliche Erörterung der *Baranow*schen Reduktion voranzustellen. Der hier geführte Beweis ist neu und, wie ich glaube, kürzer und anschaulicher als derjenige meiner früheren Arbeit, in der das Hauptgewicht auf eine mathematische Klärung dieser eigenartigen Reduktion gelegt wurde.

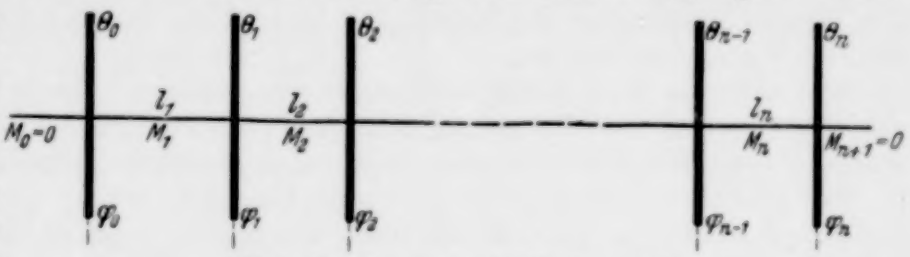

Abb. 1. Das Ersatzsystem der Maschinenwelle

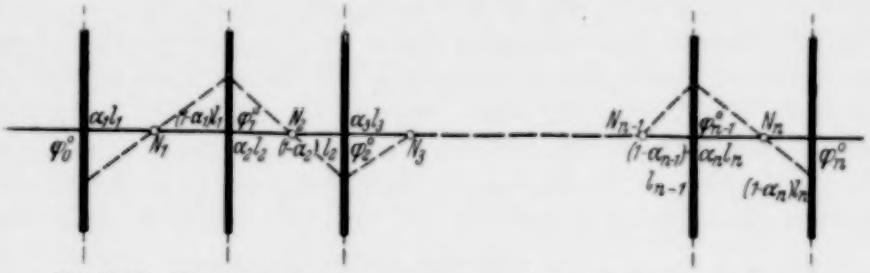

Abb. 2. Die Eigenschwingungsform höchster Ordnung mit der Eigenfrequenz ω_0.

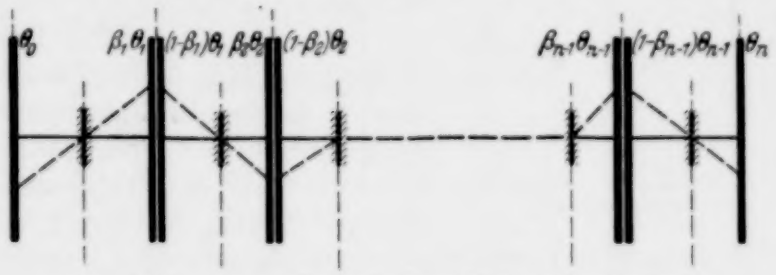

Abb. 3. Aufteilung in 2 n Elementarsystem derselben Eigenfrequenz ω_0.

Abb. 4. Die neue, nach der *Baranow*schen Reduktion entstandene Welle.

2. Die *Baranow*sche Reduktion. Abb. 1 zeigt eine unverzweigte Schwingerkette, das übliche Ersatzsystem einer Maschinenwelle, mit den Bezeichnungen, die wir in den nachstehenden Rechnungen verwenden wollen. Die Welle ist mit $n+1$ Drehmassen besetzt, deren Trägheitsmomente $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_n$ sind. Die einzelnen

[1] *K. Klotter*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 49; dort Schrifttumshinweis auf Seite 61 unter [17].
[2] *K. Haug*, Die Drehschwingungen in Kolbenmaschinen. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1952.
[3] *H. Schaefer*, Abh. Braunschweig. Wiss. Gesellschaft 5 (1953), S. 141.

Wellenabschnitte mit den Längen $l_1, l_2, \ldots, l_n$ seien alle auf dieselbe Torsionssteifigkeit $GI_T = 1/\gamma$ reduziert. Die Größen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sind die Winkelamplituden der Drehmassen, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ die Amplituden der Drillmomente in den einzelnen Wellenabschnitten. Denken wir uns die Welle links von Θ_0 und rechts von Θ_n jeweils ein Stück fortgesetzt, so sind die Drillmomente M_0 bzw. M_{n+1} in diesen freien Enden ständig Null. Endlich sei ω die Kreisfrequenz einer Eigenschwingung.

Wir setzen nun voraus, daß die Eigenschwingungsform höchster Ordnung bekannt ist. Ihre Winkel- und Momentenamplituden bezeichnen wir mit φ_k^0 bzw. M_k^0, ihre Eigenfrequenz mit ω_0. Zwischen zwei benachbarten Drehmassen Θ_{k-1} und Θ_k besitzt die Eigenschwingung höchster Ordnung genau einen Knoten N_k, der das Wellenstück l_k in $\alpha_k l_k$ und $(1-\alpha_k) l_k$ teilt (Abb. 2). Nun sei die Welle in bekannter Weise in $2n$ Elementarsysteme aufgeteilt, von denen jedes mit der Frequenz ω_0 schwingt (Abb. 3). Die hierzu benötigte Aufteilung der Trägheitsmomente Θ_k in $\beta_k \Theta_k$ und $(1-\beta_k)\Theta_k$, mit $\beta_0 = 0$ und $\beta_n = 1$, wie sie Abb. 3 zeigt, gewinnt man aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\gamma \omega_0^2} = \Theta_0 \alpha_1 l_1 = \cdots = \beta_k \Theta_k (1-\alpha_k) l_k = (1-\beta_k)\Theta_k \alpha_{k+1} l_{k+1} \\ = \beta_{k+1}\Theta_{k+1}(1-\alpha_{k+1}) l_{k+1} = \cdots = \Theta_n (1-\alpha_n) l_n \ . \end{aligned}\right| \tag{2.1}$$

Ohne weiteres ist einzusehen, daß man die Winkel- und Momentenamplituden dieser Elementarsysteme derart wählen kann, daß benachbarte Drehmassen $\beta_k \Theta_k$ und $(1-\beta_k)\Theta_k$ mit derselben Amplitude schwingen und daß gleichzeitig in benachbarten Wellenstücken $\alpha_k l_k$ und $(1-\alpha_k) l_k$ dasselbe Drillmoment vorhanden ist. Fast trivial ist demnach die Bemerkung, daß man mit diesen $2n$ Elementarsystemen die Eigenschwingungsform höchster Ordnung darstellen kann, so wie sie in Abb. 3 eingezeichnet ist.

Wie aber hat man dieselben Elementarsysteme zu benutzen, wenn irgend eine andere Eigenschwingungsform der Welle dargestellt werden soll? So absonderlich die Fragestellung zunächst scheinen mag, ihre Beantwortung führt auf die dynamische Deutung der *Baranow*schen Reduktion.

Offensichtlich dürfen jetzt zwei benachbarte Wellenstücke $\alpha_k l_k$ und $(1-\alpha_k) l_k$ nicht mehr in N_k festgehalten sein, vielmehr muß die Möglichkeit zugestanden werden, daß beide dort dieselbe Winkelamplitude φ_{k-1}^*, die im allgemeinen von Null verschieden sein wird, besitzen. Zwei benachbarte Drehmassen $\beta_k \Theta_k$ und $(1-\beta_k)\Theta_k$ müssen durch ein zwischen ihnen wirkendes Kräftepaar M_k^* (Reaktionskraft) gezwungen werden, mit gleichen Amplituden zu schwingen, oder anders ausgedrückt, die starre Verbindung der benachbarten Drehmassen $\beta_k \Theta_k$ und $(1-\beta_k)\Theta_k$ wird durch ein Kräftepaar M_k^* beansprucht. Sämtliche M_k^* und φ_k^* sind Null bei der Eigenschwingungsform höchster Ordnung, bei einer anderen Eigenschwingungsform dagegen von Null verschieden. Die geometrischen Bedingungen, daß $\beta_k \Theta_k$ und $(1-\beta_k)\Theta_k$ dieselbe Amplitude φ_k, und die dynamischen Bedingungen, daß die Wellenstücke $\alpha_k l_k$ und $(1-\alpha_k) l_k$ dasselbe Drillmoment M_k besitzen sollen, liefern die erforderlichen Gleichungen zur Bestimmung der M_k^* und φ_k^*. Diese Gedankengänge werden in den folgenden Rechnungen ausgeführt.

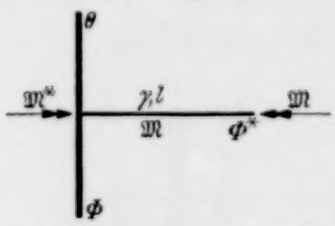

Abb. 5. Erzwungene Schwingungen der Elementarsysteme.

Eine elementare Grundbetrachtung sei vorweggenommen. Der Schwinger Abb. 5 wird links durch das Kräftepaar $\mathfrak{M}^* = M^* \cos \omega t$ erregt, das rechte Ende der Welle wird zwangsläufig geführt mit dem vorgeschriebenen Drehwinkel $\Phi^* = \varphi^* \cos \omega t$. Gefragt ist nach dem Drehwinkel Φ der Drehmasse Θ und dem Reaktionsmoment $\mathfrak{M}$ rechts, das gleichzeitig Drillmoment der Welle ist.

Bei geeigneter Vorzeichenfestsetzung gelten die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Theta \ddot{\Phi} &= \mathfrak{M} - \mathfrak{M}^* , \\ \mathfrak{M} &= \gamma l (\Phi^* - \Phi) , \end{aligned}\right| \tag{2.2}$$

die durch den Ansatz

$$\Phi = \varphi \cos \omega t , \quad \mathfrak{M} = M \cos \omega t$$

in

$$\left.\begin{aligned} M^* &= M + \omega^2 \Theta \varphi , \\ \varphi^* &= \gamma l M + \varphi \end{aligned}\right| \tag{2.3}$$

übergehen. Ihre Auflösung nach M und φ lautet

$$\left.\begin{aligned} D M &= M^* - \omega^2 \Theta \varphi^* , \\ D\varphi &= -\gamma l M^* + \varphi^* , \end{aligned}\right| \tag{2.4}$$

wobei $D = 1 - \omega^2/\omega_0^2$ und $1/\gamma l \Theta = \omega_0^2$ gesetzt wurde. Dabei ist ω_0 die Eigenfrequenz des Schwingers, dessen Eigenschwingung der Lösung (2.4) überlagert werden könnte.

Ist der Schwinger nach Abb. 6 angeordnet, so lauten die (2.3) und (2.4) entsprechenden Gleichungen (bei Beachtung der oben getroffenen Vorzeichenwahl)

$$\left.\begin{aligned} M^* &= M - \omega^2 \Theta \varphi\,, \\ \varphi^* &= -\gamma l M + \varphi\,, \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

$$\left.\begin{aligned} D M &= M^* + \omega^2 \Theta \varphi^*\,, \\ D \varphi &= \gamma l M^* + \varphi^*\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Abb. 6. Erzwungene Schwingungen der Elementarsysteme.

Diese Vorbetrachtungen verwenden wir bei dem Zusammenbau unserer $2n$ Elementarsysteme, wenn eine Eigenschwingungsform beliebiger Ordnung dargestellt werden soll. Abb. 7 zeigt einen Ausschnitt aus der Reihe der Elementarsysteme. Von links nach rechts gelten die Gleichungen

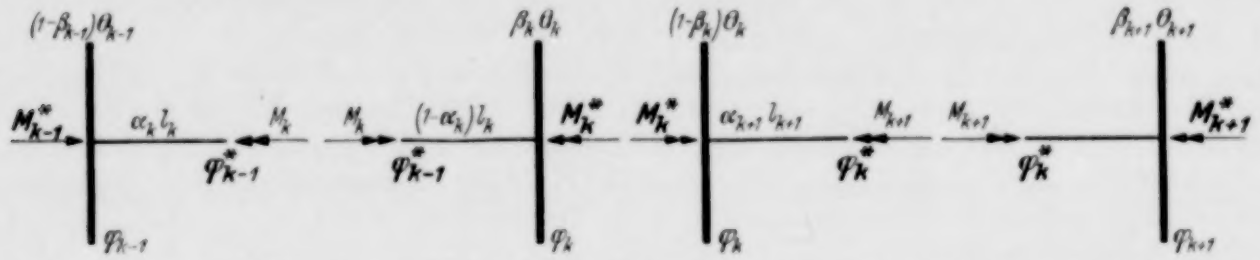

Abb. 7. Zusammenbau der Elementarsysteme bei einer Eigenschwingungsform φ_k, die verschieden ist von der Eigenschwingungsform höchster Ordnung φ_k^0.

$$\left.\begin{aligned} M_{k-1}^* &= M_k + \omega^2 (1 - \beta_{k-1})\, \Theta_{k-1} \varphi_{k-1}\,, \\ \varphi_{k-1}^* &= \gamma\, \alpha_k l_k M_k + \varphi_{k-1}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

$$\left.\begin{aligned} M_k^* &= M_k - \omega^2 \beta_k \Theta_k \varphi_k\,, \\ \varphi_{k-1}^* &= -\gamma\, (1 - \alpha_k)\, l_k M_k + \varphi_k\,, \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

$$\left.\begin{aligned} M_k^* &= M_{k+1} + \omega^2 (1 - \beta_k)\, \Theta_k \varphi_k\,, \\ \varphi_k^* &= \gamma\, \alpha_{k+1} l_{k+1} M_{k+1} + \varphi_k\,, \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

$$\left.\begin{aligned} M_{k+1}^* &= M_{k+1} - \omega^2 \beta_{k+1} \Theta_{k+1} \varphi_{k+1}\,, \\ \varphi_k^* &= -\gamma\, (1 - \alpha_{k+1})\, l_{k+1} M_{k+1} + \varphi_{k+1}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

Die Elimination von M_k^* aus (2.8) und (2.9) und die von φ_{k-1}^* aus (2.7) und (2.8) führt natürlich auf die bekannten Schwingungsgleichungen der Welle

$$M_{k+1} - M_k = -\omega^2 \Theta_k \varphi_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)\,, \qquad (2.11)$$

$$\varphi_k - \varphi_{k-1} = \gamma\, l_k M_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.12)$$

mit $M_0 = M_{n+1} = 0$.

Die Gleichungssysteme (2.7) bis (2.10) werden nun umgekehrt. Nach (2.4) und (2.6) lauten ihre Auflösungen

$$\left.\begin{aligned} D M_k &= M_{k-1}^* - \omega^2 (1 - \beta_{k-1})\, \Theta_{k-1} \varphi_{k-1}^*\,, \\ D \varphi_{k-1} &= -\gamma\, \alpha_k l_k M_{k-1}^* + \varphi_{k-1}^*\,, \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

$$\left.\begin{aligned} D M_k &= M_k^* + \omega^2 \beta_k \Theta_k \varphi_{k-1}^*\,, \\ D \varphi_k &= \gamma\, (1 - \alpha_k)\, l_k M_k^* + \varphi_{k-1}^*\,, \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

$$\left.\begin{aligned} D M_{k+1} &= M_k^* - \omega^2 (1 - \beta_k)\, \Theta_k \varphi_k^*\,, \\ D \varphi_k &= -\gamma\, \alpha_{k+1} l_{k+1} M_k^* + \varphi_k^*\,, \end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

$$\left.\begin{aligned} D M_{k+1} &= M_{k+1}^* + \omega^2 \beta_{k+1} \Theta_{k+1} \varphi_k^*\,, \\ D \varphi_{k+1} &= \gamma\, (1 - \alpha_{k+1})\, M_{k+1}^* + \varphi_k^*\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

Wegen (2.1) haben die Determinanten aller Gleichungssysteme (2.7) bis (2.10) denselben Wert

$$D = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \tag{2.17}$$

wobei ω_0 die für alle Elementarsysteme gleiche Eigenfrequenz bezeichnet, die höchste der Welle. In den Gleichungssystemen (2.13) bis (2.16) muß demnach $\omega = \omega_0$ ausgeschlossen bleiben. Sie gelten für alle Eigenschwingungsformen q_k mit Ausnahme derjenigen höchster Ordnung.

Wir eliminieren M_{k+1} aus (2.15) und (2.16), ferner q_k aus (2.14) und (2.15) und erhalten

$$M_{k+1}^* - M_k^* = -\omega^2 [(1-\beta_k)\,\Theta_k + \beta_{k+1}\,\Theta_{k+1}]\,q_k^* \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{2.18}$$

$$q_k^* - q_{k-1}^* = \gamma\,[(1-\alpha_k)\,l_k + \alpha_{k+1}\,l_{k+1}]\,M_k^* \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2.19}$$

mit $M_0^* = M_n^* = 0$.

Der Vergleich von (2.18) und (2.19) mit (2.11) und (2.12) liegt jetzt nahe. Beide Gleichungssysteme stellen Eigenwertprobleme dar, deren Lösungen Eigenschwingungsformen unserer Welle sind. Sehen wir einmal davon ab, daß im zuletzt erhaltenen Gleichungsystem die Eigenschwingungsformen durch M_k^* und q_k^* charakterisiert sind, statt wie sonst üblich durch M_k und q_k, so geht aus der Herleitung des neuen Eigenwertproblems (2.18), (2.19) klar hervor, daß die Eigenschwingungsform höchster Ordnung hier nicht mehr als Eigenlösung auftritt. Das alle Eigenschwingungsformen der Welle umfassende Eigenwertproblem (2.11), (2.12) ist demnach mit Hilfe der bekannten Eigenschwingungsform höchster Ordnung über die Transformation der M_k, q_k in die M_k^*, q_k^* um eine Stufe reduziert worden.

In (2.18) und (2.19) führen wir nun die Abkürzungen

$$\Theta_k^* = (1-\beta_k)\,\Theta_k + \beta_{k+1}\,\Theta_{k+1}, \qquad \beta_0 = 0, \quad \beta_n = 1, \tag{2.20}$$

$$l_k^* = (1-\alpha_k)\,l_k + \alpha_{k+1}\,l_{k+1} \tag{2.21}$$

ein und gewinnen dadurch die auf eine naheliegende dynamische Analogie hinweisende Gleichungsform

$$M_{k+1}^* - M_k^* = -\omega^2\,\Theta_k^*\,q_k^* \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{2.22}$$

$$q_k^* - q_{k-1}^* = \gamma\,l_k^*\,M_k^* \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2.23}$$

mit $M_0^* = M_n^* = 0$.

Die M_k^* deuten wir als Drillmomente einer Welle, die mit den Drehmassen Θ_k^* besetzt ist. Die q_k^* seien die Winkelamplituden dieser Drehmassen, die l_k^* die Längen der Wellenabschnitte. Die Definitionsgleichungen (2.20) und (2.21) der Θ_k^* und l_k^* zusammen mit Abb. 3 und 4 lehren, wie verblüffend einfach unsere neue Welle gebildet werden kann, wenn die Eigenschwingungsform höchster Ordnung der ursprünglichen Welle bekannt ist. Diese Konstruktion verdankt man *Baranow*.

Die neue Welle besitzt eine Drehmasse und damit einen Freiheitsgrad weniger als die alte Welle. Beide Wellen stimmen in ihren Eigenfrequenzen überein, abgesehen von der höchsten Eigenfrequenz der alten Welle, die der neuen fehlt.

Es ist wohl unmittelbar einzusehen, daß alle obigen Gleichungen ihre Gültigkeit behalten, wenn man unter ω_0 irgendeine beliebige Eigenfrequenz der Welle versteht, daß also die Reduktion auch mit einer bekannten Eigenschwingungsform beliebiger Ordnung vorgenommen werden kann. Man überzeugt sich aber sofort, daß dann alle anschaulichen dynamischen Betrachtungen, die unsere Rechnungen bis zum Schluß begleitet haben, hinfällig werden.

3. Die Transformationen der Eigenschwingungsformen. Unter W wollen wir in Zukunft die alte Welle verstehen, unter W^* die aus W durch eine *Baranow*sche Reduktion entstandene. Für die Bestimmung der Eigenschwingungsformen von W mit Hilfe des *Baranow*schen Reduktionsverfahrens ist es wichtig zu wissen, wie sich eine Eigenschwingungsform von W^* in diejenige gleicher Frequenz von W transformiert. Diese Transformationen sind sehr einfach den Gleichungssystemen (2.13) bis (2.16) zu entnehmen.

Aus (2.13) und (2.14) ergibt sich

$$D(q_k - q_{k-1}) = \gamma\,l_k\,[\alpha_k\,M_{k-1}^* + (1-\alpha_k)\,M_k^*] \tag{3.1}$$

und nach (2.12)

$$D\,M_k = \alpha_k\,M_{k-1}^* + (1-\alpha_k)\,M_k^* \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.2}$$

Dabei ist $M_0^* = M_n^* = 0$. Aus (2.14) und (2.15) folgt

$$D(M_{k+1} - M_k) = -\omega^2 \Theta_k [\beta_k \varphi_{k-1}^* + (1 - \beta_k) \varphi_k^*], \tag{3.3}$$

also nach (2.11)

$$D\varphi_k = \beta_k \varphi_{k-1}^* + (1 - \beta_k) \varphi_k^* \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{3.4}$$

Wegen $\beta_0 = 0$ und $\beta_n = 1$ wird

$$D\varphi_0 = \varphi_0^*, \tag{3.5}$$

$$D\varphi_n = \varphi_{n-1}^*. \tag{3.6}$$

Die Gleichungen (3.2) und (3.4) zeigen, wie eine Eigenlösung des reduzierten Eigenwertproblems (2.18), (2.19) umgerechnet werden kann in die zum gleichen Eigenwert gehörige Lösung des ursprünglichen Eigenwertproblems (2.11), (2.12).

Mehr als die Drillmomente M_k sind gewöhnlich die Winkelamplituden φ_k der Eigenschwingungen von Interesse. Ihre Rücktransformation (3.4) von W^* nach W läßt sich sehr einfach zeichnerisch bewerkstelligen. Um dies einzusehen, schreiben wir (3.4) zunächst als Proportion

$$\frac{\varphi_{k-1}^* - D\varphi_k}{1 - \beta_k} = \frac{D\varphi_k - \varphi_k^*}{\beta_k} \tag{3.5}$$

und schließen die Sonderfälle $k = 0$ und $k = n$, die bereits durch (3.5) und (3.6) erledigt sind, aus. Nach (2.1) ist

$$\beta_k (1 - \alpha_k) l_k = (1 - \beta_k) \alpha_{k+1} l_{k+1}, \tag{3.6}$$

so daß (3.5) als Proportion von Strecken gedeutet werden kann:

$$\frac{\varphi_{k-1}^* - D\varphi_k}{(1 - \alpha_k) l_k} = \frac{D\varphi_k - \varphi_k^*}{\alpha_{k+1} l_{k+1}}. \tag{3.7}$$

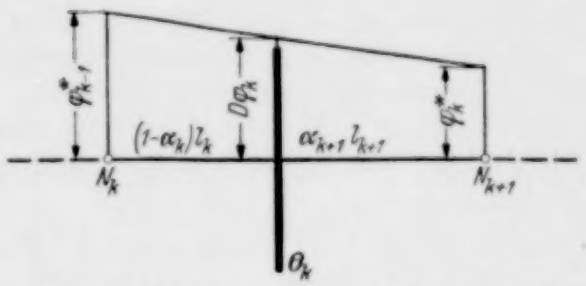

Abb. 8. Zeichnerische Darstellung der Proportion (3.7).

Wir erinnern uns, daß φ_k^* ursprünglich definiert ist als Verdrehwinkel der Welle W an derjenigen Stelle, an der ihre Eigenschwingung höchster Ordnung den Knoten N_{k+1} besitzt. Trägt man also die als Strecken dargestellten Winkelamplituden φ_{k-1}^* und φ_k^* der Welle W^* in den Punkten N_k bzw. N_{k+1} der Welle W als Ordinaten auf, so gibt (3.7) die einfache Konstruktion von $D\varphi_k$ nach Abb. 8. Wegen $D < 1$ ist φ_k immer größer als $D\varphi_k$. Da aber alle φ_k einer Eigenschwingungsform nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, darf man bereits die $D\varphi_k$ als die gesuchten Amplituden der Drehmassen Θ_k von W ansehen.

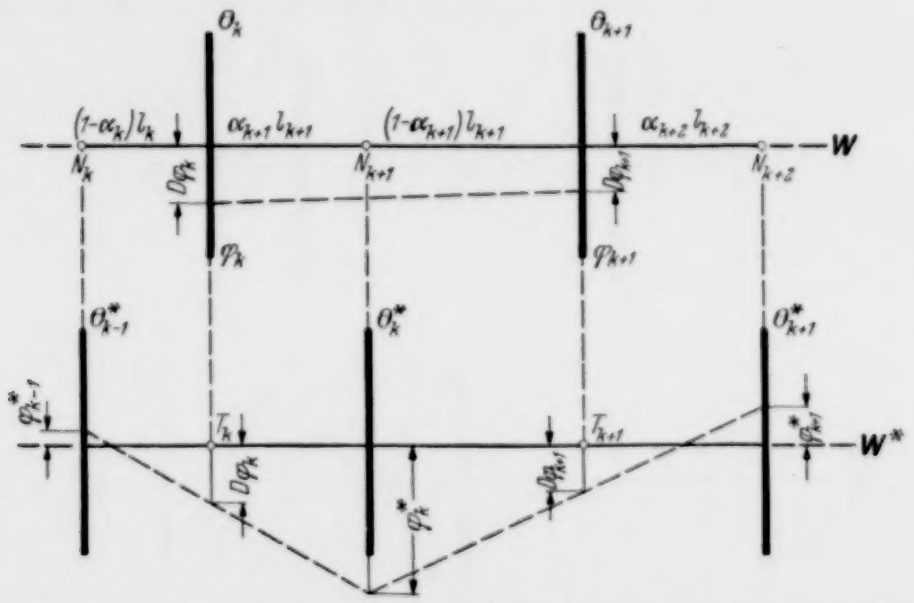

Abb. 9. Die Rücktransformation einer Eigenschwingung des reduzierten Systems W^* in diejenige gleicher Eigenfrequenz des Systems W.

Meistens wird es bequemer sein, die Strecken $D\varphi_k$ bereits im System W^* abzugreifen und sie dann nach W zu übertragen, wie es Abb. 9 zeigt.

Die $D\varphi_k$ sind gleich den Verdrehwinkeln der Welle W^* in den Punkten T_k (nicht zu verwechseln mit den Knoten der Eigenschwingung höchster Ordnung von W^*), also dort, wo bei W die Drehmassen Θ_k sitzen. Wörtlich gilt dies auch für die Wellenenden, die wir nach (3.5) und (3.6) gesondert zu betrachten haben. Man stelle sich vor, daß W^* überstehende Wellenenden besitzt, die sich bei einer elastischen Schwingung der Welle wie starre Körper drehen (Abb. 10). Ihre Drehwinkel sind deshalb gleich den Drehwinkeln der Endmassen Θ_0^* bzw. Θ_{n-1}^*.

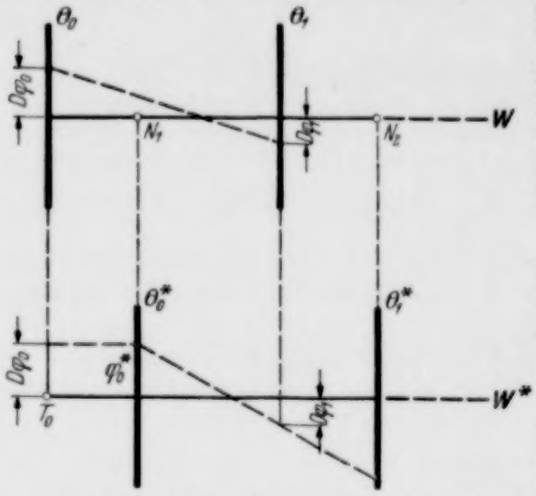

Abb. 10. Die Rücktransformation der Winkelamplitude am Wellenende.

Im *Baranow*schen Verfahren wird, nachdem die Eigenschwingungsform höchster Ordnung von W^* ermittelt worden ist, weiter reduziert auf ein System W^{**}, das zwei Freiheitsgrade weniger als W besitzt, und so fort, bis nach insgesamt $n-1$ Reduktionen ein System von zwei Drehmassen entstanden ist, dessen Eigenfrequenz gleich der niedrigsten von W ist. Bei jedem Reduktionsschritt benutzt *Baranow* die *Kutzbach*sche Seileckskonstruktion, die, wie an vielen Beispielen festgestellt wurde, die Eigenschwingungsform höchster Ordnung und ihre Frequenz mit zufriedenstellender Genauigkeit liefert. Auf eine Erörterung dieser Konstruktion darf hier verzichtet werden, da man ausführliche Beschreibungen, auch des *Baranow*schen Verfahrens, bei *Klotter* und *Haug* findet.

Da wir jetzt wissen, wie die Eigenschwingungsformen höchster Ordnung der einzelnen reduzierten Systeme auf W zurücktransformiert werden, können wir uns durch simple zeichnerische Konstruktionen sämtliche Eigenschwingungsformen von W verschaffen, unmittelbar im Anschluß an das *Baranow*sche Verfahren. *Baranow* wird diese Transformationen nicht gekannt haben; denn sonst hätte er sich nicht mit der Bestimmung der Eigenschwingungszahlen allein begnügt. Ob er überhaupt einen allgemeinen Beweis für die Exaktheit seiner Reduktion gekannt hat, ist nicht festzustellen.

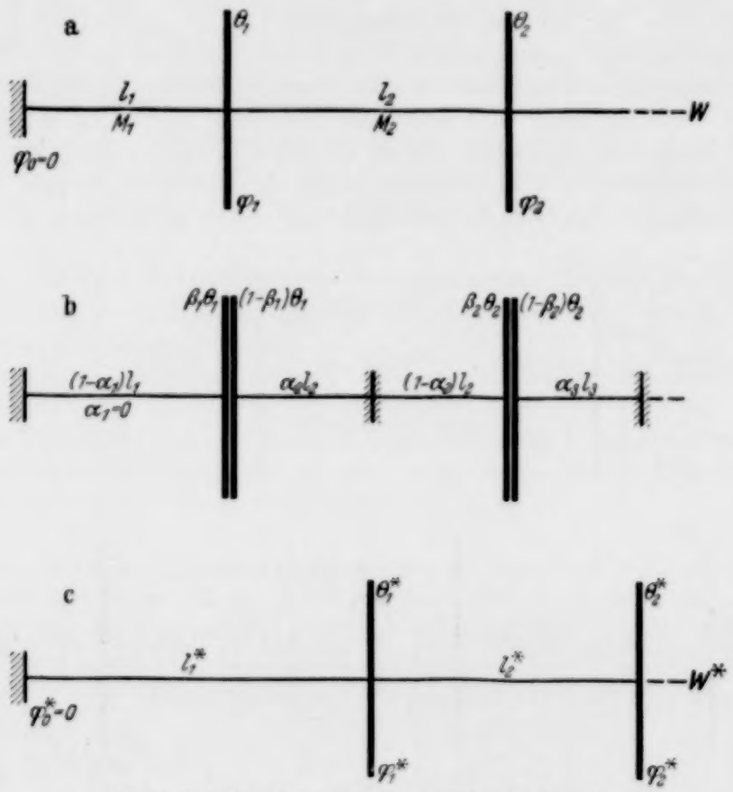

Abb. 11. Reduktion bei festgehaltenem linken Wellenende.

Erwähnt sei noch, daß man durch Umkehrung des *Baranow*schen Verfahrens, von einem Zwei-Massen-System ausgehend, eine Schwingerkette mit vorgeschriebenen Eigenfrequenzen aufbauen kann.

4. Festgehaltenes Ende der Welle als Randbedingung. Auch bei dieser Randbedingung läßt sich eine *Baranow*sche Reduktion durchführen. Wir erläutern dies an Abb. 11. Bild a) zeigt W mit eingespanntem linken Wellenende $\varphi_0 = 0$, Bild b) die Elementarsysteme gleicher Eigenfrequenz ω_0 und Bild c) das reduzierte System W^*. Jetzt ist α_1 Null, und die Aufteilungsfaktoren β_k beginnen mit $\beta_1, \beta_2, \ldots$. Beachtet man dies, so behalten sämtliche Transformationsgleichungen für Winkel, Torsionsmomente, Längen und Trägheitsmomente Gültigkeit.

Auch die *Baranow*sche Seileckskonstruktion läßt sich sofort auf diese Randbedingung übertragen.

5. Zusammenfassung. Aus anschaulichen dynamischen Betrachtungen heraus wird ein von *Baranow* ohne Beweis angegebenes Verfahren zu Ermittlung der Torsionseigenfrequenzen einer Welle entwickelt und seine Exaktheit nachgewiesen. Ferner wird gezeigt, wie man dem *Baranow*schen Verfahren mit geringer zusätzlicher Zeichenarbeit sämtliche Eigenschwingungsformen entnehmen kann.

(Eingegangen am 23. Oktober 1954.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *H. Schaefer*, Braunschweig, Technische Hochschule.

Die Abbildung eines allgemeinen Schwingungssystems auf eine einfache Schwingerkette*

Von S. Falk

1. Einführung, Ziel der Arbeit. Es handelt sich im folgenden um ungedämpfte mechanische Schwingungssysteme mit n Freiheitsgraden, für welche potentielle Energie U und kinetische Energie T quadratische Formen in den gewählten Koordinaten x_i und deren zeitlichen Ableitungen sind:

$$2\,U = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_i\, a_{ik}\, x_k = \mathfrak{x}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{x},\quad 2\,T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_i\, b_{ik}\, \dot{x}_k = \dot{\mathfrak{x}}'\,\mathfrak{B}\,\dot{\mathfrak{x}} \tag{1}$$

mit

$$\mathfrak{x}' = (x_1, x_2 \ldots x_n),\quad \dot{\mathfrak{x}}' = (\dot{x}_1, \dot{x}_2 \ldots \dot{x}_n),\quad \mathfrak{A} = (a_{ik}),\quad \mathfrak{B} = (b_{ik}). \tag{2}$$

Dabei werden die elastischen Eigenschaften des Schwingungssystems durch die „Federungsmatrix" $\mathfrak{A}$ und die Trägheitseigenschaften durch die „Trägheitsmatrix" $\mathfrak{B}$ ausgedrückt. Die Koordinaten fassen wir zur einzeiligen Matrix $\mathfrak{x}'$, ihre Ableitungen zu $\dot{\mathfrak{x}}'$ zusammen. Quadratische Matrizen werden durch große, einspaltige Matrizen (Spaltenvektoren) durch kleine gotische Buchstaben, einzeilige Matrizen (Zeilenvektoren) durch kleine gotische Buchstaben mit einem Strich ′ gekennzeichnet. Ganz allgemein bedeutet der Strich den Übergang zur transponierten Matrix.

Die Energieformen (1) lassen sich stets so schreiben, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ symmetrisch, also $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ $(a_{ik} = a_{ki})$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$ $(b_{ik} = b_{ki})$ werden. Beide Matrizen seien zunächst reell. $\mathfrak{B}$ ist seiner physikalischen Natur nach positiv definit, d. h. die quadratische Form $2\,T$ ist für reelle Werte $\dot{x}_i$ stets positiv und nur gleich Null, wenn sämtliche $\dot{x}_i$ verschwinden, das System also in Ruhe ist. $\mathfrak{A}$ setzen wir fürs erste positiv definit oder positiv halbdefinit voraus, d. h. die potentielle Energie U sei für beliebige Werte x_i niemals negativ; zusammengefaßt:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \text{ positiv (halb)definit},\quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \text{ positiv definit}. \tag{3}$$

Unter dieser Voraussetzung sind die Quadrate ω_i^2 der Eigenkreisfrequenzen positiv oder gleich Null, die Schwingungen des Systems also stabil.

Wir betrachten nun vier verschiedene Klassen von Schwingungsgebilden, die alle den Bedingungen (3) genügen und in Tabelle 1 zusammengestellt sind.

Tabelle 1. *Einteilung mechanischer ungedämpfter Schwingungssysteme.*

Klasse	Federungsmatrix positiv (halb) definit	Trägheitsmatrix positiv definit	Mehrfache Eigenfrequenzen sind
I: (Abb. 1)	Vollmatrix $\mathfrak{A}$	Vollmatrix $\mathfrak{B}$	möglich
II: Versetzte Welle (Abb. 2)	Dreiermatrix $\mathfrak{G}$; Zeilen- und Spaltensummen sind im allgemeinen nicht Null	Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$	nicht möglich
III: Durchlaufende Welle (Abb. 3)	Dreiermatrix $\mathfrak{C}$; Zeilen- und Spaltensummen sind Null (gegebenenfalls bis auf erste und letzte)	Diagonalmatrix $\mathfrak{Z}$	nicht möglich
IV: Reihe von Elementarschwingern (Abb. 4)	Diagonalmatrix $\mathfrak{F}$	Diagonalmatrix $\mathfrak{T}$	möglich

* Gekürzte Fassung der Dr.-Ing.-Dissertation des Verfassers: „Die Berechnung der Torsionseigenschwingungszahlen verzweigter Maschinenanlagen", Berichter: Prof. Dr.-Ing. *H. Schaefer*, Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. *K. Löhner*, Braunschweig 1953.

Das Schema der Abb. 1 ist nur symbolisch zu verstehen; es vertritt alle denkbaren ungedämpften Schwingungssysteme, deren Matrizen der Voraussetzung (3) genügen. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind im allgemeinen Vollmatrizen, d. h. alle ihre Elemente sind von Null verschieden. Die Systeme der Klassen II, III und IV sind Sonderfälle von I; als Repräsentanten wählen wir masselose elastische Wellen mit konstanten Drehsteifigkeiten C_{ik} (cm kg), die mit dünnen Scheiben der Trägheitsmomente J_i (cm kg sec^{-2}) besetzt sind. Die dimensionslosen Winkelauslenkungen aus der entspannten Lage seien die Koordinaten x_i. Jetzt unterscheiden wir:

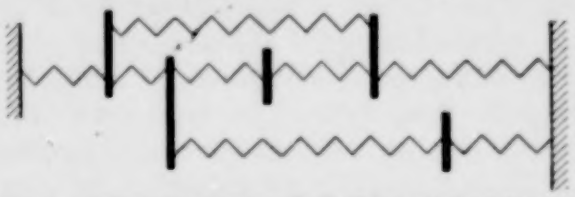

Abb. 1. Allgemeines ungedämpftes stabiles Schwingungssystem mit n Freiheitsgraden.

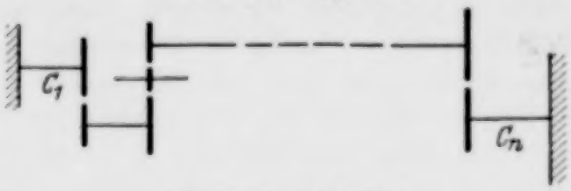

Abb. 2. Versetzte Welle.

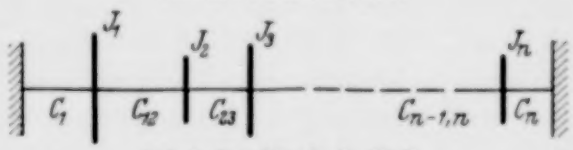

Abb. 3. Durchlaufende Welle.

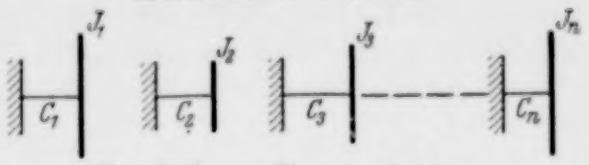

Abb. 4. Reihe von Elementarschwingern.

Klasse II: Versetzte Welle mit Zahnrädern. Die Federungsmatrix heiße $\mathfrak{G}$, die Trägheitsmatrix $\mathfrak{D}$. Man zeigt leicht, daß bei der getroffenen Koordinatenwahl $\mathfrak{D}$ Diagonal- und $\mathfrak{G}$ Dreiermatrix ist, d. h. $\mathfrak{D}$ enthält von Null verschiedene Elemente nur in der Hauptdiagonale ($d_{ik} = 0$ für $i \neq k$) und $\mathfrak{G}$ nur in der Hauptdiagonale und den beiden benachbarten Nebendiagonalen.

Klasse III: Durchlaufende Welle mit Federungsmatrix $\mathfrak{C}$ und Trägheitsmatrix $\mathfrak{J}$. Auch $\mathfrak{C}$ ist Dreiermatrix, aber spezieller als $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{J}$ Diagonalmatrix:

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} C_1 + C_{12} & -C_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ -C_{12} & C_{12} + C_{23} & -C_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & -C_{23} & C_{23} + C_{34} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -C_{n-1,n} & C_{n-1,n} + C_n \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_n \end{pmatrix}; \quad (4)$$

Die zugehörigen Energieformen nach (1) sind

$$2\,U = C_1\,x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} C_{i,\,i+1}\,(x_i - x_{i+1})^2 + C_n\,x_n^2\,,\quad 2\,T = \sum_{i=1}^{n} J_i\,\dot{x}_i^2\,. \qquad (5)$$

In $\mathfrak{C}$ sind sämtliche Zeilen- und Spaltensummen gleich Null bis auf die erste und letzte. Ist die Welle am linken (rechten) Ende frei, so verschwindet mit C_1 (C_n) auch noch die erste (letzte) Zeilen- und Spaltensumme. Im Fall $C_1 = C_n = 0$ tritt genau einmal die Eigenfrequenz Null auf: die freie Welle kann unverdrillt als starrer Körper rotieren.

Diese Klasse von Schwingungsgebilden hat *Grammel*[2] eingehend untersucht und eine Anzahl von theoretisch ebenso interessanten wie praktisch wertvollen Sätzen bewiesen, insbesondere Schranken für die Eigenfrequenzen angegeben.

Klasse IV: Kette von Elementarschwingern. Hier sind Federungsmatrix $\mathfrak{F}$ und Trägheitsmatrix $\mathfrak{T}$ beide von Diagonalgestalt; das Schwingungssystem ist vollständig entkoppelt, und die Eigenfrequenzen lassen sich ohne weiteres ablesen.

Die Ermittlung der Eigenschwingungszahlen und -formen von Schwingungssystemen der Klasse I ist im allgemeinen mit erheblichem Rechenaufwand verknüpft. Die Systeme der Klasse III dagegen bereiten weniger Schwierigkeiten, und es sind wegen ihres häufigen Auftretens in der technischen Praxis (z. B. als Kurbelwellen) in der Ingenieurmechanik zahlreiche praktische Verfahren entwickelt worden, die fast alle, ob ausgesprochen oder nicht, auf der speziellen Gestalt der Matrizen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{C}$ — oft auch hier noch $C_1 = C_n = 0$ voraussetzend — beruhen und deshalb auch allein auf diese Klasse beschränkt bleiben. Eine besonders einfache zeichnerische Methode ist die von *Baranow*[1], die auch für beiderseits eingespannte Wellen gilt. *Haug*[3] wies im Jahre 1952 erst-

[1] *G. Baranow*, Z. VDI 76 (1932), S. 184 und Metal Ind. Herald Moscow 11 (1931) S. 60. (In deutschen Bibliotheken nicht vorhanden.)

[2] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 14 (1943/44), S. 213.

[3] *K. Haug*, Die Drehschwingungen in Kolbenmaschinen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

malig darauf hin, daß die noch in dem großen zusammenfassenden Bericht von *Klotter*[1] als Näherungsverfahren bezeichnete Seileckskonstruktion von *Baranow* e x a k t richtig ist, und *H. Schaefer*[2] erbrachte nicht nur einen neuen Beweis für diese Tatsache, sondern zeigte überdies, wie man der *Baranow*schen Konstruktion außer den Eigenschwingungszahlen auch noch sämtliche Eigenschwingungsformen mit wenigen Strichen entnimmt. Es lag daher der Versuch nahe, dieses so einfache graphische Verfahren auch für die umfangreichere Klasse I von Schwingungssystemen nutzbar zu machen, was in der Tat gelingt.

Dazu bemerken wir als erstes, daß der in der Tabelle 1 angegebenen Einteilung keinerlei mechanische, sondern lediglich mathematische Bedeutung zukommt: jedes vorgelegte mechanische Schwingungsgebilde, das den Voraussetzungen (3) genügt, läßt sich nach Belieben je nach Wahl der (nicht immer anschaulichen) Koordinaten als System einer der vier Klassen darstellen. Oder anders ausgedrückt: hat man zunächst irgendwelche Koordinaten $x_1, \ldots x_n$ gewählt, in denen das System als zu einer der vier Klassen gehörig erscheint, so läßt es sich nachträglich durch eine lineare Koordinatentransformation immer in ein solches der anderen drei Klassen überführen, wobei sämtliche Eigenfrequenzen erhalten bleiben. Die Transformation der Klassen I, II und III auf IV, also auf eine Kette von Elementarschwingern, ist als sogenannte Hauptachsentransformation hinlänglich bekannt; sie erfordert jedoch die Kenntnis der — in der Praxis doch gerade gesuchten — Eigenfrequenzen, weshalb ihr im allgemeinen nur theoretischer Wert zukommt. Wir stecken deshalb unser Ziel weniger weit und begnügen uns mit der Transformation der Klassen I und II auf III, zeigen also, wie man mit Hilfe einer linearen Koordinatentransformation ein vorgegebenes mechanisches Schwingungsgebilde, das den Bedingungen (3) genügt, auf eine durchlaufende Welle zurückführen oder „abbilden" und somit einerseits dem Verfahren von *Baranow-Schaefer* und zum anderen den Einschließungssätzen von *Grammel* zugänglich machen kann.

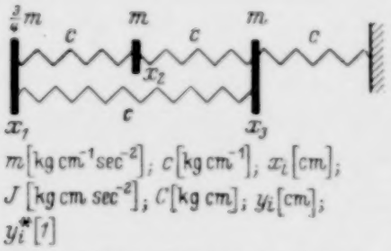

Abb. 5. Schwingungssystem der Klasse I mit drei Freiheitsgraden.

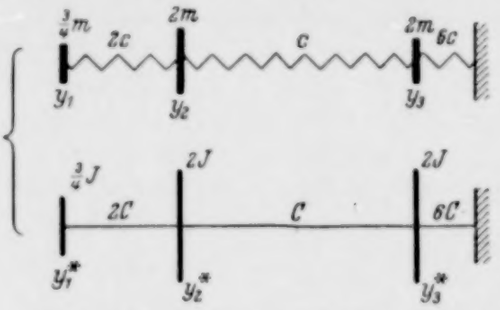

Abb. 6. Bildwelle (bzw. Bildkette) des Originalsystems von Abb. 5.

Vorweg ein einfaches Beispiel: für das System der Abb. 5 ist offenbar

$$2\,U = c\,(x_1 - x_2)^2 + c\,(x_2 - x_3)^2 + c\,(x_1 - x_3)^2 + c\,x_3^2\,,\quad 2\,T = \frac{3}{4}\,m\,\dot{x}_1^2 + m\,\dot{x}_2^2 + m\,\dot{x}_2^2\,. \tag{6}$$

Wie man leicht nachrechnet, werden mit den durch

$$x_1 = y_1\,,\quad x_2 = y_2 + y_3\,,\quad x_3 = y_2 - y_3 \tag{7}$$

eingeführten neuen Koordinaten y_i potentielle und kinetische Energie

$$\left.\begin{aligned} 2\,U &= c(y_1 - y_2 - y_3)^2 + c(y_2 + y_3 - y_2 + y_3)^2 + c\,(y_1 - y_2 + y_3)^2 + c(y_2 - y_3)^2 \\ &= 2\,c(y_1 - y_2)^2 + c(y_2 - y_3)^2 + 6\,c\,y_3^2\,, \\ 2\,T &= \frac{3}{4}\,m\,\dot{y}_1^2 + m(\dot{y}_2 + \dot{y}_3)^2 + m(\dot{y}_2 - \dot{y}_3)^2 = \frac{3}{4}\,m\,\dot{y}_1^2 + 2\,m\,\dot{y}_2^2 + 2\,m\,\dot{y}_3^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Das in (6) störende Glied $c\,(x_1 - x_3)^2$ ist in (8) verschwunden; die Transformation (7) hat somit ihren Zweck erfüllt: ein Vergleich mit (4) zeigt, daß die Bildwelle des Originalsystems das Aussehen von Abb. 6 hat, auch der entsprechende Translationsschwinger (Schwingungskette) ist angegeben.

Es entsteht nun die Frage, ob es stets eine solche Transformation gibt, und wenn ja, wie man sie praktisch findet. Wir zeigen im Abschnitt **2,** daß die Transformation unter den Voraussetzungen (3) immer, und zwar nicht nur auf eine Weise, möglich ist. Der Rechenaufwand liegt dabei in der gleichen Größenordnung wie der anderer Verfahren, welche die Frequenzgleichung $\det(\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{B}) = 0$

[1] *K. Klotter*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 1.
[2] *H. Schaefer*, Abh. Braunschweig. Wiss. Gesellschaft 5 (1953), S. 141.

explizit aufstellen, um die Eigenfrequenzen daraus zu berechnen, eine Aufgabe, die das Verfahren von *Baranow-Schaefer* ja gerade zeichnerisch löst.

Für die praktische Durchführung der Transformation ist es bequem, mit Hilfe zweier zweckmäßig gewählter Vergleichsgrößen C (cm kg, kg cm^{-1} usw.) und J (cm kg sec^{-2}, kg cm^{-1} sec^{-2} usw.) alle Elemente der Federungs- und Trägheitsmatrix dimensionslos zu machen und ebenfalls dimensionslose Koordinaten zu wählen. Dann sind $k_i = \omega_i^2\, C/J$ die ebenfalls dimensionslosen „Eigenwerte" des Systems; die Ausschläge $x_{i1}, \ldots x_{in}$, die zu einem Eigenwert k_i gehören, also die zur Eigenfrequenz ω_i gehörige Eigenschwingungsform, heißt dann der „Eigenvektor" $\mathfrak{x}_i$.

2. Die Abbildung eines allgemeinen Systems auf eine durchlaufende Welle. Wir führen jetzt die alten Koordinaten x_i als Linearkombinationen neuer Koordinaten y_i ein, die wir zum Vektor $\mathfrak{y}$ zusammenfassen:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} r_{ik}\, y_k \quad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{R}\,\mathfrak{y}\,, \ \mathfrak{R} = (\mathfrak{r}_1, \ldots \mathfrak{r}_n)\,. \tag{9}$$

Dann werden potentielle und kinetische Energie von der Form

$$2\,U = \mathfrak{x}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{y}'\,\mathfrak{R}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{y}\,, \quad 2\,T = \dot{\mathfrak{x}}'\,\mathfrak{B}\,\dot{\mathfrak{x}} = \dot{\mathfrak{y}}'\,\mathfrak{R}'\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{R}\,\dot{\mathfrak{y}}\,. \tag{10}$$

Gesucht sind solche Koordinaten y_i, in denen sich U und T deuten lassen als potentielle und kinetische Energie einer durchlaufenden Welle. Es ist indessen bequemer, das Schwingungssystem der Klasse I mit den Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zunächst auf die versetzte Welle der Klasse II mit den Matrizen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}$ abzubilden; der Schritt von II nach III ist dann leicht nachzuholen. Wir verlangen also vorerst nur, daß

$$\mathfrak{R}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{G} \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}'\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{D} \tag{11}$$

wird. Die neuen Matrizen $\mathfrak{G} = (g_{ik})$ und $\mathfrak{D} = (d_{ik})$ erfüllen ebenfalls die Bedingungen (3), ihre Elemente sind die Bilinearformen

$$g_{ik} = \mathfrak{r}_i'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{r}_k \quad \text{und} \quad d_{ik} = \mathfrak{r}_i'\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}_k\,. \tag{12}$$

Unsere Forderungen an die gesuchte Transformationsmatrix $\mathfrak{R} = (\mathfrak{r}_1, \ldots \mathfrak{r}_n)$ sind also nach (11):

a) $\mathfrak{G}$ soll eine Dreiermatrix sein, d. h. es müssen alle Elemente g_{ik}, für welche die Differenz der Zeiger i und k dem Betrage nach größer als eins ist (z. B. g_{31}, g_{25} usw.) verschwinden:

$$g_{ik} = \mathfrak{r}_i'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{r}_k = 0 \quad \text{für} \quad |i - k| > 1\,. \tag{13}$$

b) $\mathfrak{D}$ soll eine Diagonalmatrix sein, d. h. die gesuchten Spalten (Zeilen)-vektoren $\mathfrak{r}_i$ ($\mathfrak{r}_i'$) von $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}'$) müssen verallgemeinert orthogonal zur gegebenen Matrix $\mathfrak{B}$ werden:

$$d_{ik} = \mathfrak{r}_i'\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}_k = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k\,. \tag{14}$$

Eine hier übergangene Überlegung zeigt nun, daß sich die Vektoren $\mathfrak{r}_1'$, $\mathfrak{r}_2'$ ... nach willkürlicher Wahl von $\mathfrak{r}_1'$ aus einer einfachen Rekursionsformel bestimmen und mit ihnen die Matrizen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}$ schrittweise aufbauen lassen: sind die ersten m Vektoren $\mathfrak{r}_i'$ ermittelt, so liegen damit auch die m-reihigen Hauptabschnittsmatrizen oben links in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}$ bereits fest. Es sind Verfahren bekannt, die zwar auch die Transformation von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}$ leisten [1], die aber keine Rekursionsformel nach Art von (15) entwickeln und auch die speziellen Formen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{J}$ nicht zum Ziele haben, somit auch nicht auf den mechanischen Fragenkreis des Abschnittes III anwendbar sind.

Die grundlegende Rekursionsformel zur Berechnung der Vektoren $\mathfrak{r}_i'$ lautet nun:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{r}_{m+1}'}{s_{m+1}} &= -\,\mathfrak{r}_m'\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} + \frac{g_{mm}}{d_{mm}}\cdot\mathfrak{r}_m' + \frac{g_{m-1,\,m}}{d_{m-1,\,m-1}}\,\mathfrak{r}_{m-1}' \\ &\text{für } m = 1, 2, \ldots \text{ mit } g_{01} = 0 \text{ und } d_{00} = 1\,,\ s_i \neq 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Zum Beweise nehmen wir an, die Vektoren $\mathfrak{r}_1'$ bis $\mathfrak{r}_m'$ seien bereits bekannt, die Bedingungen (13) und (14) also für $i, k = 1, 2, \ldots m$ erfüllt, und multiplizieren (15) von rechts mit dem Spalten-

[1] Eine solche Transformation findet sich bereits bei *C. G. J. Jacobi* (*Jacobi*, Werke Bd. 6, S. 318—321), wie mir freundlicherweise Herr Prof. *Bilharz*, Würzburg, mitteilte. In neuerer Zeit ist das Problem auf andere Weise angefaßt worden von *C. Lanczos*, J. Research, Nat. Bu. Stand. 45 (1950) S. 255 und *W. E. Arnoldi*, Quaterly of Appl. Math. 9 (1951) S. 17.

vektor $\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}_p$. Dann stellen wir fest, daß die linken Seiten von (15) verschwinden:

$$p \leq m-2: \quad \frac{\mathfrak{r}'_{m+1}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}_p}{s_{m+1}} = -0+0+0=0,$$

$$p = m-1: \quad \frac{\mathfrak{r}'_{m+1}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}_{m-1}}{s_{m+1}} = -g_{m,\,m-1}+0+g_{m-1}\frac{d_{m-1,\,m-1}}{d_{m-1,\,m-1}}=0,$$

$$p = m: \quad \frac{\mathfrak{r}'_{m+1}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}_m}{s_{m+1}} = -g_{mm}+g_{mm}\cdot\frac{d_{mm}}{d_{mm}}+0=0;$$

zusammengefaßt:

$$\mathfrak{r}'_{m+1}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}_p = d_{m+1,\,p} = 0 \quad \text{für} \quad p = 1,\,2,\ldots m. \tag{16}$$

Das heißt: der nach (15) ermittelte neue Vektor $\mathfrak{r}'_{m+1}$ steht in der Tat verallgemeinert senkrecht auf $\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_m$, wie es (14) verlangt.

Jetzt denken wir uns die Formel (15) für irgendeine Nummer $q \leq m-1$ hingeschrieben und von rechts mit $\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}_{m+1}$ multipliziert, dann wird wegen (16)

$$0 = -\mathfrak{r}'_q\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{r}_{m+1}+0+0, \quad \text{also } g_{q,\,m+1} = 0 \text{ für } q = 1,\,2,\ldots m-1. \tag{17}$$

Die neu zu berechnenden Elemente der $m+1$ten Zeile und Spalte von $\mathfrak{G}$ sind somit nach (17) gleich Null außer $g_{m,\,m+1} = g_{m+1,\,m}$ und $g_{m+1,\,m+1}$; damit ist auch (13) erfüllt.

Zum Schluß multiplizieren wir noch (15) mit $\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}_{m+1}$ und bekommen

$$\frac{d_{m+1,\,m+1}}{s_{m+1}} = -g_{m,\,m+1} \quad \text{oder} \quad d_{m+1,\,m+1} = -s_{m+1}\,g_{m,\,m+1} \quad \text{für} \quad m = 1,\,2,\ldots \tag{18}$$

Der von Null verschiedene Faktor s_{m+1} ist dabei noch ganz beliebig; man könnte ihn nach jedem Schritt so bestimmen, daß $\mathfrak{D}$ in die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ übergeht, also alle $d_{ii} = 1$ werden, oder auch so, daß Zeilen- und Spaltensumme der Matrix $\mathfrak{G}$ verschwinden (gegebenenfalls bis auf die letzte), so daß dann $\mathfrak{G}$ von vornherein die spezielle Form $\mathfrak{C}$ (4) hat. Am einfachsten ist es jedoch, zunächst $s_{m+1} = 1$ zu wählen, dann wird nach (18)

$$d_{m+1,\,m+1} = -g_{m,\,m+1} \quad \text{für} \quad m = 1,\,2,\ldots \tag{19}$$

Das heißt: die Hauptdiagonalelemente d_{ii} der Matrix $\mathfrak{D}$ brauchen überhaupt nicht berechnet zu werden, sie sind außer dem ersten d_{11} gleich den negativen Nebendiagonalelementen von $\mathfrak{G}$; diese selbst müssen demnach negativ sein, denn die d_{ii} sind als quadratische Formen der positiv definiten Matrix $\mathfrak{B}$ stets positiv.

Wir schreiben nun, (19) benutzend, die Rekursionsformeln (15) noch einmal ausführlich hin; es ist

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{r}'_1 = \mathfrak{r}'_1 \quad \text{frei wählbar, damit ist } d_{11} = \mathfrak{r}'_1\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}_1 \text{ zu berechnen,}\\
&\mathfrak{r}'_2 = -\mathfrak{r}'_1\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}^{-1}+\frac{g_{11}}{d_{11}}\mathfrak{r}'_1, \qquad d_{22} = -g_{21},\\
&\mathfrak{r}'_3 = -\mathfrak{r}'_2\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}^{-1}+\frac{g_{22}}{d_{22}}\mathfrak{r}'_2+\frac{g_{12}}{d_{11}}\mathfrak{r}'_1, \quad d_{33} = -g_{32},\\
&\mathfrak{r}'_4 = -\mathfrak{r}'_3\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}^{-1}+\frac{g_{33}}{d_{33}}\mathfrak{r}'_3+\frac{g_{23}}{d_{22}}\mathfrak{r}'_2, \quad d_{44} = -g_{43}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{15a}$$

und so weiter. Damit sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}$ ermittelt. Es wäre natürlich überflüssig, die zugehörige versetzte Welle wirklich aufzusuchen, da wir sie ja mit Hilfe der Faktoren s_i sogleich wieder auf eine durchlaufende Welle abbilden wollen. Zu diesem Zwecke führen wir noch einmal neue Koordinaten $z_i = y_i/s_i$ bzw. $y_i = s_i\,z_i$ ein, oder, wenn wir die s_i zur Diagonalmatrix $\mathfrak{S}$ zusammenfassen,

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{z}, \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{R}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{R}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{z}, \quad \mathfrak{z}' = (z_1,\ldots z_n). \tag{20}$$

Damit werden potentielle und kinetische Energie in den neuen Koordinaten z_i

$$2\,U = \mathfrak{x}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{y}'\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{z}'\,\mathfrak{S}'\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{z} = \mathfrak{z}'\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{z}, \tag{21}$$

$$2\,T = \dot{\mathfrak{x}}'\,\mathfrak{B}\,\dot{\mathfrak{x}} = \dot{\mathfrak{y}}'\,\mathfrak{D}\,\dot{\mathfrak{y}} = \dot{\mathfrak{z}}'\,\mathfrak{S}'\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{S}\,\dot{\mathfrak{z}} = \dot{\mathfrak{z}}'\,\mathfrak{J}\,\dot{\mathfrak{z}}, \tag{22}$$

und die neuen Matrizen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{J}$, die wiederum den Bedingungen (3) genügen, sind

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{S}' \mathfrak{G} \mathfrak{S}, \quad c_{ik} = c_{ki} = s_i g_{ik} s_k, \tag{23}$$

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{S}' \mathfrak{D} \mathfrak{S}, \qquad i_{ii} = d_{ii} s_i^2. \tag{24}$$

[Die Elemente c_{ik} in (23) sind nicht mit den Drehsteifigkeiten C_{ik} in (4) zu verwechseln.] Jetzt verlangen wir, daß die Zeilensummen — und damit wegen der Symmetrie auch die Spaltensummen — von $\mathfrak{C}$ gleich Null werden bis auf die letzte. Die Matrizen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{J}$ entstehen nach (23) und (24) aus $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}$, indem deren Zeilen und Spalten der Reihe nach mit $s_1, \ldots s_n$ multipliziert werden. Ziehen wir in $\mathfrak{C}$ aus jeder Zeile den gemeinsamen Faktor s_i wieder heraus, so verbleibt zur Berechnung der Größen s_i das homogene Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
g_{11} s_1 + g_{12} s_2 &= 0, \\
g_{21} s_1 + g_{22} s_2 + g_{23} s_3 &= 0, \\
g_{32} s_2 + g_{33} s_3 + g_{34} s_4 &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots

Nun hängen die Hauptabschnittsdeterminanten H_i^* von $\mathfrak{C}$ und H_i von $\mathfrak{G}$, wie leicht einzusehen, folgendermaßen zusammen:

$$H_i^* = H_i \prod_{\nu=1}^{i} s_\nu^2 , \tag{30}$$

und da gezeigt ist, daß alle $s_i \neq 0$ sind, gilt nach (29) auch

$$H_1^*, H_2^*, \ldots\ldots H_{n-1}^* > 0 , \quad \begin{cases} H_n^* > 0 \text{ falls } \mathfrak{A} \text{ positiv definit} , \\ H_n^* = 0 \text{ falls } \mathfrak{A} \text{ positiv halbdefinit} . \end{cases} \tag{31}$$

Jetzt denken wir uns in der Determinante von $\mathfrak{C}$ die ersten $n-1$ Spalten zur letzten addiert: die Elemente der neuen letzten Spalte sind dann gerade die Zeilensummen der Matrix $\mathfrak{C}$, die ersten $n-1$ von ihnen verschwinden daher — gerade so haben wir ja die s_i aus (25) bestimmt — und das letzte Element rechts unten ist gleich σ_n. Die Determinante nach der letzten Spalte entwickelt ergibt nun

$$\det \mathfrak{C} = H_n^* = \sigma_n H_{n-1}^* , \qquad \sigma_n = \frac{H_n^*}{H_{n-1}^*} , \tag{32}$$

und es folgt ohne weiteres, da nach (31) H_{n-1}^* auf jeden Fall positiv ist:

$$\sigma_n > 0 \text{ falls } \mathfrak{A} \text{ positiv definit}; \qquad \sigma_n = 0 \text{ falls } \mathfrak{A} \text{ positiv halbdefinit} . \tag{33}$$

Also ist auch die Bedingung b_2) erfüllt.

Damit ist gezeigt: Unter den Voraussetzungen (3) lassen sich mit Hilfe der Rekursionsformeln (15 a) und der Gleichungen (25) die gegebenen Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ stets überführen in zwei andere Matrizen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{J}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $\mathfrak{J}$ ist Diagonalmatrix mit lauter positiven Hauptdiagonalelementen,

2) $\mathfrak{C}$ ist symmetrische Dreiermatrix mit positiven Hauptdiagonal- und negativen Nebendiagonalelementen; die ersten $n-1$ Zeilen- und Spaltensummen von $\mathfrak{C}$ sind gleich Null, die letzte Zeilen- und Spaltensumme ist nicht negativ.

Die Matrizen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{J}$ lassen sich somit immer deuten als Federungs- und Trägheitsmatrix einer durchlaufenden Welle, die links frei und rechts eingespannt oder frei ist, je nach dem ob $\mathfrak{A}$ positiv definit oder positiv halbdefinit war. Mit anderen Worten: Besitzt das Originalsystem den Eigenwert Null, so ist die Bildwelle beiderseits frei; wenn nicht, so ist sie rechts eingespannt.

Sind nun Eigenschwingungszahlen ω_i^2 und -formen $\mathfrak{z}_i$ nach *Baranow-Schaefer* ermittelt, so erhält man die Eigenschwingungsformen $\mathfrak{x}_i$ des Originalsystems durch die einfache Rücktransformation (20)

$$\mathfrak{x}_i = \mathfrak{R}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{z}_i \qquad \text{mit} \qquad \mathfrak{R}\,\mathfrak{S} = (s_1\,\mathfrak{r}_1, s_2\,\mathfrak{r}_2 \ldots\ldots s_n\,\mathfrak{r}_n) . \tag{34}$$

Der Ausgangsvektor $\mathfrak{r}_1'$ in (15a) und der erste Koeffizient s_1 in (25) sind frei wählbar; der Vektor $s_1\,\mathfrak{r}_1'$ enthält genau n willkürliche Konstanten, also gibt es auch ∞^n voneinander verschiedene Bildwellen zum gleichen Original. Man könnte versuchen, eine oder einige der Komponenten des Ausgangsvektors als unbestimmte Parameter mit in die Rechnung aufzunehmen, um sie an gegebener Stelle nach praktischen Gesichtspunkten zu verwerten, etwa so, daß einige Trägheitsmomente oder Drehsteifigkeiten der Bildwelle vorgeschriebene Werte annehmen, es zeigt sich aber, daß selbst ein einziger mitgeführter Parameter schon nach dem ersten Schritt die Rechnung derart anschwellen läßt, daß für die Praxis sich ein solches Vorgehen von selbst verbietet. Man wird daher am einfachsten $\mathfrak{r}_1' = (1, 0, 0, \ldots 0)$ oder ähnlich und $s_1 = 1$ wählen, um möglichst viel Rechenarbeit einzusparen.

Erstes Beispiel. Wir wählen das System der Abb. 5. Dividiert man alle Elemente der Federungsmatrix durch c, die Elemente der Trägheitsmatrix durch m, so werden die dimensionslosen Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nebst der Reziproken $\mathfrak{B}^{-1}$

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir beginnen die Transformation etwa mit $\mathfrak{r}_1' = (1, 0, 0)$, schreiben diesen Vektor links unten neben die Matrix $\mathfrak{A}$ (siehe Hauptschema) und bilden den Vektor $\mathfrak{r}_1'\,\mathfrak{A} = (2, -1, -1)$, der rechts neben $\mathfrak{r}_1'$, also unter $\mathfrak{A}$ hingeschrieben wird. Rechts neben $\mathfrak{A}$ tragen wir den Spaltenvektor $\mathfrak{r}_1$ ein und ermitteln aus ihm und dem Zeilenvektor $\mathfrak{r}_1'\,\mathfrak{A}$ das innere Produkt $\mathfrak{r}_1'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{r}_1 = g_{11} = 2$. Ferner

wird $\mathfrak{r}_1' \mathfrak{B} \mathfrak{r}_1 = d_{11} = 3/4$, und der erste Rechenschritt ist beendet. Die stark ausgezogene Linie mit der Ziffer 1 im folgenden Hauptschema grenzt alle Zahlen ein, die wir bis jetzt hingeschrieben haben.

Hauptschema

$$\begin{array}{cc} & \mathfrak{A} \\ & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left(\begin{array}{c|c|c} \mathfrak{r}_1 & \mathfrak{r}_2 & \mathfrak{r}_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \mathfrak{R} \qquad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \mathfrak{R}' \\ 1\ \mathfrak{r}_1' & \\ 2\ \mathfrak{r}_2' & \\ \mathfrak{r}_3' & \end{array} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -1 \\ \hline -2 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 3/2 & -2 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -2 & 0 \\ \hline -2 & 3 & -1/2 \\ \hline 0 & -1/2 & 7/4 \end{array}\right) \mathfrak{G}$$

Aus (15 a) ist nun $\mathfrak{r}_2' = -\mathfrak{r}_1' \mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} + g_{11} \mathfrak{r}_1'/d_{11}$ zu ermitteln; den Vektor $\mathfrak{r}_1' \mathfrak{A}$ finden wir bereits im Hauptschema vor, wir brauchen ihn nur noch mit $\mathfrak{B}^{-1}$ zu multiplizieren, das heißt hier insbesondere, seine erste Komponente mit dem Faktor 4/3 zu versehen und die beiden anderen wegen der Einsen in $\mathfrak{B}^{-1}$ einfach stehen zu lassen. Danach wird

$$\begin{aligned} -\mathfrak{r}_1' \mathfrak{A} &= (-2, 1, 1) \\ -\mathfrak{r}_1' \mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} &= (-8/3, 1, 1) \\ \frac{g_{11}}{d_{11}} \mathfrak{r}_1' = \frac{2}{3/4} \mathfrak{r}_1' &= (8/3, 0, 0) \\ \hline \mathfrak{r}_2' &= (0, 1, 1). \end{aligned}$$

Jetzt tragen wir $\mathfrak{r}_2'$ unter $\mathfrak{r}_1'$ in das Schema ein, berechnen den Zeilenvektor $\mathfrak{r}_2' \mathfrak{A} = (-2, 1, 2)$ und das innere Produkt $\mathfrak{r}_2' \mathfrak{A} \mathfrak{r}_1 = g_{21} = -2$. Rechts neben $\mathfrak{r}_1$ ist der Spaltenvektor $\mathfrak{r}_2$ hinzuschreiben; mit ihm werden die beiden Produkte $\mathfrak{r}_1' \mathfrak{A} \mathfrak{r}_2 = g_{12} = -2$ und $\mathfrak{r}_2' \mathfrak{A} \mathfrak{r}_2 = g_{22} = 3$ errechnet. Damit sind auch alle Zahlen innerhalb der mit 2 bezifferten Begrenzungslinie bekannt. Wir bemerken, daß tatsächlich $g_{21} = g_{12} = -2$ ist, die Matrix $\mathfrak{G}$ muß ja symmetrisch werden. Will man das nicht als Kontrolle verwerten, so braucht man $\mathfrak{r}_1' \mathfrak{A} \mathfrak{r}_2 = g_{12}$ gar nicht auszurechnen, sondern nur hinzuschreiben, da ja g_{21} schon vorher bekannt ist. Diese Bemerkung gilt natürlich für jeden weiteren Rechenschritt. Nach (19) ist $d_{22} = -g_{21} = 2$. Der dritte und letzte Vektor wird nach (15a)

$$\begin{aligned} -\mathfrak{r}_2' \mathfrak{A} &= (2, -1, -2) \\ -\mathfrak{r}_2' \mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} &= (8/3, -1, -2) \\ \frac{g_{22}}{d_{22}} \mathfrak{r}_2' = \frac{3}{2} \mathfrak{r}_2' &= (0, 3/2, 3/2) \\ \frac{g_{12}}{d_{11}} \mathfrak{r}_1' = \frac{-2}{3/4} \mathfrak{r}_1' &= (-8/3, 0, 0) \\ \hline \mathfrak{r}_3' &= (0, 1/2, -1/2) \end{aligned}$$

Damit läßt sich das Hauptschema voll ausfüllen. Schließlich ist noch $d_{33} = -g_{32} = 1/2$, und die Matrizen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}$ sind berechnet.

Das Gleichungssystem (25) wird nun

$$\begin{aligned} 2 s_1 - 2 s_2 &= 0, \\ -2 s_1 + 3 s_2 - 1/2 s_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wählt man $s_1 = 1$, so folgt leicht $s_2 = 1$ und $s_3 = 2$. Es sind also lediglich die dritten Zeilen und Spalten von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}$ nach (23) und (24) mit $s_3 = 2$ zu multiplizieren, das ergibt die gesuchten Matrizen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{J}$

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1+6 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Bildwelle zeigt die Abb. 6, die Seileckskonstruktion von *Baranow-Schaefer* Abb. 7. Die genauen Eigenwerte sind $k_1 = (11 - \sqrt{85})/6 = 0{,}2965$, $k_2 = (11 + \sqrt{85})/6 = 3{,}375$ und $k_3 = 4{,}000$ mit den Eigenvektoren $\mathfrak{z}'_{\delta 1} = (1;\ 0{,}89;\ 0{,}14)$, $\mathfrak{z}'_{\delta 2} = (1;\ 0{,}29;\ -1{,}14)$ und $\mathfrak{z}'_{\delta 3} = (1;\ -1/2;\ 1/2)$. Die Transformationsmatrix (34) ist hier

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{S} = (1 \cdot \mathfrak{r}_1,\ 1 \cdot \mathfrak{r}_2,\ 2 \cdot \mathfrak{r}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Transformiert man zum Beispiel den Eigenvektor $\mathfrak{z}'_{\delta 3}$ zum Eigenwert $k_3 = 4{,}000$ zurück, so wird $\mathfrak{x}'_{\xi 3} = (\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{z}_{\delta 3})' = (1,\ 0,\ -1)$.

Ist die Trägheitsmatrix keine Diagonalmatrix, so braucht man nicht etwa die Reziproke $\mathfrak{B}^{-1}$ wirklich zu berechnen, sondern nur $\mathfrak{B}$ in das Produkt $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}\mathfrak{D}'$ zu zerlegen, wo $\mathfrak{D}$ eine obere, also $\mathfrak{D}'$ eine untere Dreiecksmatrix ist. Dann aber läßt sich $\mathfrak{r}'_m \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}^{-1}$ ohne Kenntnis von $\mathfrak{B}^{-1}$ auf

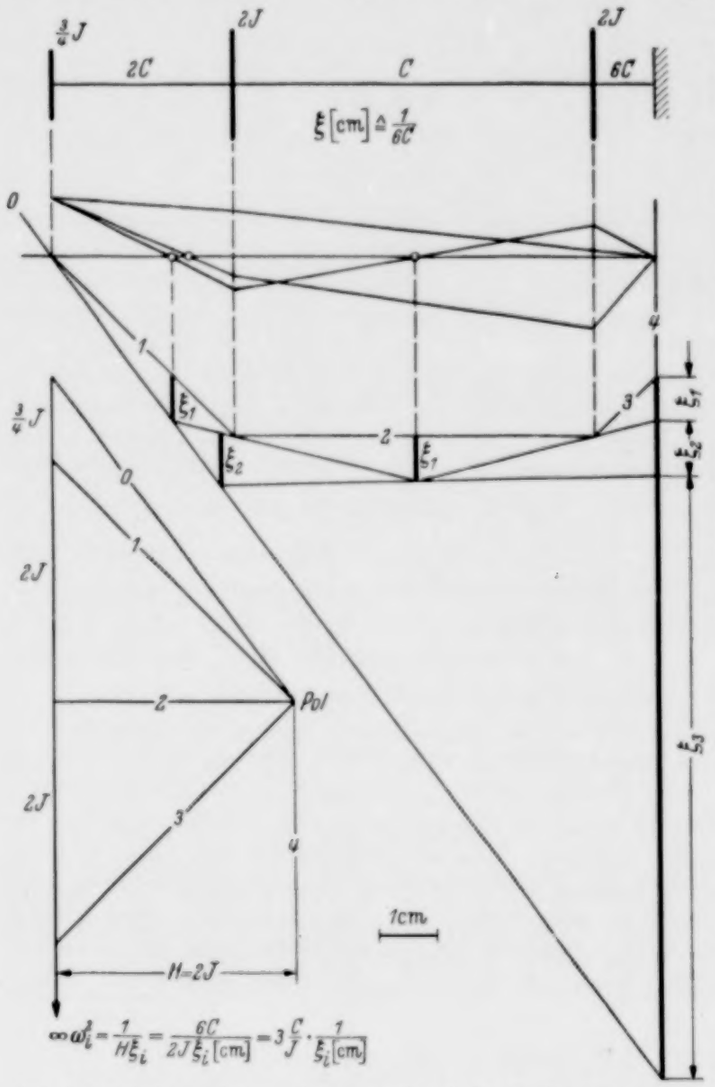

Abb. 7. Seileckskonstruktion nach *Baranow-Schaefer* für das System von Abb. 6.

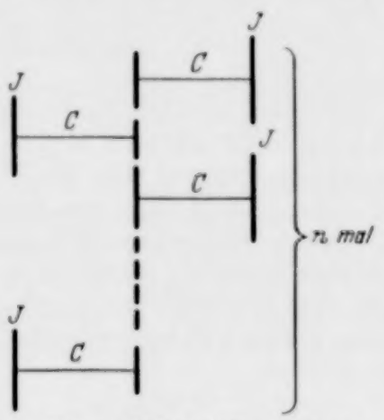

Abb. 8. „Vollständig" verzweigtes Wellensystem.

einfache Weise ermitteln. Rechentechnische Einzelheiten hierzu findet man ausführlich dargestellt bei *Zurmühl* [1], dessen bekanntem Lehrbuch auch die hier gewählte Matrizenschreibweise entnommen ist, und in einer Arbeit des Verfassers [2].

Wenn wir auch die allgemeinen Transformationsformeln hergeleitet und uns anhand eines Beispieles von ihrer Brauchbarkeit überzeugt haben, so bleibt doch, wie ein Blick auf die letzte Spalte

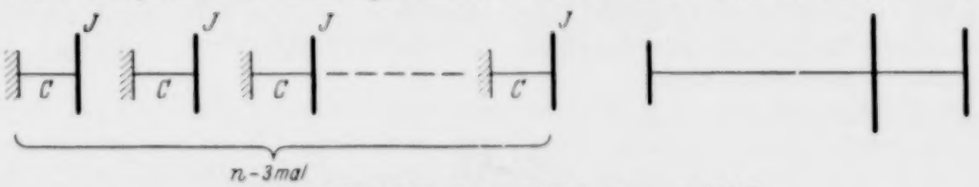

Abb. 9. Zerfallende Bildwelle des Originalsystems von Abb. 8.

der Tabelle 1 zeigt, noch eine Frage offen: Die durchlaufende Welle, wie überhaupt jedes Schwingungssystem der Klasse III hat lauter einfache Eigenfrequenzen, das vorgelegte Originalsystem der Klasse I aber kann durchaus mehrfache haben, wie z. B. das von Abb. 8 mit der $(n-2)$-fachen Eigenfrequenz $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \cdots = \omega_{n-2}^2 = C/J$, ferner $\omega_{n-1}^2 \neq \omega_1^2$ und $\omega_n^2 = 0$. Wie soll dann die zugehörige Bildwelle aussehen? Die Antwort gibt Abb. 9: die Bildwelle zerfällt in mindestens

[1] *R. Zurmühl*, Matrizen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.
[2] *S. Falk*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 6 (1954), S. 166.

$n - 2$ Teile, und zwar so, daß jeder einzelne von diesen die mehrfache Eigenfrequenz des Originalsystems als seinerseits einfache Eigenfrequenz besitzt, womit der anfängliche scheinbare Widerspruch gelöst ist. Ganz allgemein ist die höchste vorkommende Vielfachheit einer Eigenfrequenz des Originalsystems gleich der Mindestanzahl der Teilwellen im Bildsystem. Der Zerfall der Bildwelle kündigt sich bei der Transformation von selbst an, und zwar dadurch, daß für irgendeinen Rechenschritt die Formeln (15a) den Nullvektor $\mathfrak{r}'_{p+1} = 0$ liefern, dann verschwindet nach (19) mit $g_{p+1,p}$ auch $c_{p+1,p}$ in der Federungsmatrix $\mathfrak{C}$, und die entsprechende Drehsteifigkeit wird Null.

Nach dem Zerfall wird die Transformation fortgesetzt mit einem Ersatzvektor $\tilde{\mathfrak{r}}'_{p+1}$, der auf allen bisher errechneten Vektoren $\mathfrak{r}_1, \ldots \mathfrak{r}_p$ verallgemeinert senkrecht stehen muß; ein solcher Vektor ist zum Beispiel

$$\tilde{\mathfrak{r}}'_{p+1} = \mathfrak{h}' - \sum_{j=1}^{p} \frac{\mathfrak{r}'_j \mathfrak{B}\, \mathfrak{h}}{d_{jj}} \mathfrak{r}'_j \quad (\mathfrak{h}' \text{beliebig}) . \tag{35}$$

Sollte auch hier wieder der Nullvektor herauskommen, so ist ein anderer Vektor $\mathfrak{h}'$ einzusetzen.

Zur Fortsetzung der Transformation brauchen wir weiterhin das Element $d_{p+1,p+1}$, das man aus (19) natürlich nicht gewinnen kann; denn (19) ist nur für solche Vektoren gültig, die aus den Formeln (15a) stammen, nicht aber für den Ersatzvektor (35). Multiplizieren wir jetzt (35) von rechts mit $\mathfrak{B}\, \tilde{\mathfrak{r}}_{p+1}$, so wird

$$\tilde{\mathfrak{r}}'_{p+1} \mathfrak{B}\, \tilde{\mathfrak{r}}_{p+1} = d_{p+1,p+1} = \mathfrak{h}' \mathfrak{B}\, \tilde{\mathfrak{r}}_{p+1} , \tag{36}$$

und da $\mathfrak{h}'$, weil frei wählbar, im allgemeinen einfacher gebaut ist als $\tilde{\mathfrak{r}}'_{p+1}$, kommt man nach (36) bequemer zu $d_{p+1,p+1}$ als auf direktem Wege. Für $d_{p+2,p+2}$ usw. gilt dann wieder (19). Zerfällt die Welle ein zweites Mal, so sucht man nach (35) wiederum einen Ersatzvektor, der auf allen bereits berechneten Vektoren $\mathfrak{r}_i$ verallgemeinert senkrecht steht, und so fort, bis die Gesamttransformation beendet ist. Der Zerfall der Bildwelle ist vom praktischen Standpunkt aus natürlich zu begrüßen, denn die Behandlung zweier Wellenstränge mit $n - p$ und p Freiheitsgraden ist erheblich einfacher als die einer einzigen Welle mit n Freiheitsgraden.

Das Vorhandensein mehrfacher Eigenfrequenzen des Originalsystems ist für den Zerfall der Bildwelle zwar eine hinreichende, aber keineswegs notwendige Bedingung; wesentlich ist vielmehr die Wahl des Ausgangsvektors $\mathfrak{r}'_1$. Ohne die etwas langwierigen Beweise seien die genauen Bedingungen zusammengestellt:

Fall 1. Das Originalsystem hat lauter verschiedene Eigenfrequenzen.

1a) Der Ausgangsvektor $\mathfrak{r}'_1$ war so gewählt, daß er auf keinem der n Eigenvektoren $\mathfrak{x}_i$ des Originalsystems verallgemeinert senkrecht steht: dann zerfällt die Bildwelle nicht.

1b) $\mathfrak{r}'_1$ steht auf $n - t$ der Eigenvektoren $\mathfrak{x}_i$ verallgemeinert senkrecht; dann liefern die Formeln (15a) den Vektor $\mathfrak{r}'_{t+1} = 0$; die Transformation bricht ab, und zwar hat die erste Teilwelle des Bildsystems genau t Freiheitsgrade. Je nach Wahl des Ersatzvektors $\tilde{\mathfrak{r}}'_{t+1}$ kann die Welle noch weiter zerfallen. Eine zum Eigenwert k_i gehörige Eigenschwingung geht stets folgendermaßen vonstatten: Alle Teilwellen ruhen bis auf die eine, die k_i als einen von mehreren oder als einzigen Eigenwert enthält.

Fall 2. Das Originalsystem hat nur $v < n$ voneinander verschiedene Eigenfrequenzen. Jetzt steht der Ausgangsvektor $\mathfrak{r}'_1$ von vornherein auf $n - v$ Eigenvektoren $\mathfrak{x}_i$ verallgemeinert senkrecht, also bricht die Transformation spätestens an der Stelle v ab: die erste Teilwelle hat höchstens v Freiheitsgrade. Ist $\mathfrak{r}'_1$ zu noch mehreren Eigenvektoren orthogonal, so hat die erste Teilwelle weniger als v Freiheitsgrade. Je nach Wahl des Ersatzvektors kann die Welle noch mehrmals zerfallen. Die zu einem einfachen Eigenwert gehörige Eigenschwingung geht genauso vor sich wie unter Fall 1. Für einen mehrfachen Eigenwert k_i mit der Vielfachheit δ aber gilt: die δ Teilwellen, die k_i als ihrerseits einfachen Eigenwert besitzen, schwingen gleichzeitig unabhängig voneinander. Insbesondere können einige von ihnen in Ruhe bleiben, eine aber muß mindestens schwingen, damit auch das Originalsystem schwingt.

Zusammengefaßt: hat das vorgelegte Originalsystem eine Eigenfrequenz von der maximalen Vielfachheit δ_{max}, so zerfällt die Bildwelle in mindestens δ_{max} Teile, wie auch der Ausgangsvektor $\mathfrak{r}'_1$ gewählt war. Sind aber die Eigenfrequenzen des Originalsystems alle voneinander verschieden, so k a n n die Bildwelle zerfallen je nach Wahl von $\mathfrak{r}'_1$, muß es aber nicht.

Zum Schluß dieses Abschnittes machen wir noch eine technisch wichtige Bemerkung zur Schwingungsberechnung von Kurbelwellen: wie *Grammel* [1] gezeigt hat, treten bei Kurbelwellen außer den Haupttorsionen noch sogenannte Nebentorsionen auf, d. h. die Federungsmatrix ist durchaus nicht die Dreiermatrix $\mathfrak{C}$, sondern eine gewisse Vollmatrix $\mathfrak{A}$; die Kurbelwellen gehören somit, wenn man die Nebentorsionen berücksichtigen will, zu den Schwingungssystemen der Klasse I, nicht III. Nach der Transformation jedoch kann man sie wieder mit den üblichen für Kurbelwellen ohne Nebentorsionen entwickelten Verfahren behandeln.

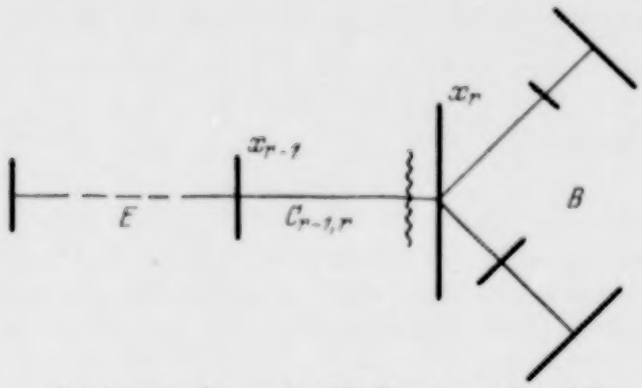

Abb. 10. Einmal verzweigtes Wellensystem, schematisch.

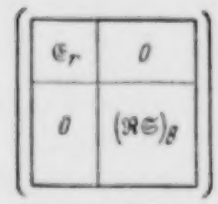

Abb. 12. Die Transformationsmatrix $(\Re\,\mathfrak{S})_{ges.}$ einer einmal verzweigten Welle.

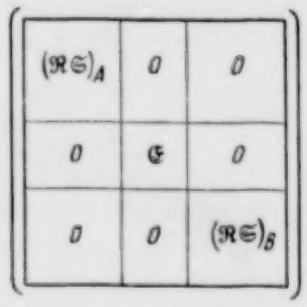

Abb. 13. Die Transformationsmatrix $(\Re\,\mathfrak{S})_{ges.}$ einer zweimal verzweigten Welle.

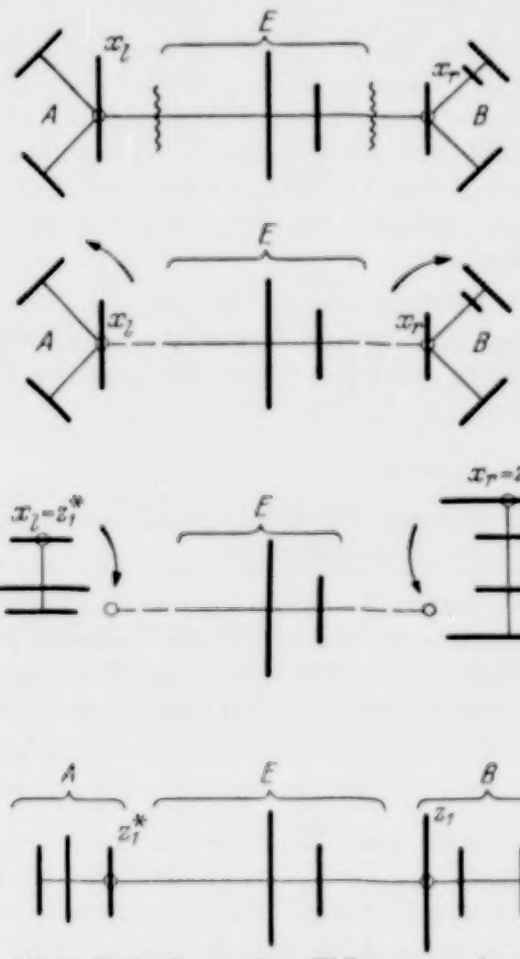

Abb. 11. Zweimal verzweigtes Wellensystem, schematisch. Abbildung auf eine durchlaufende Welle.

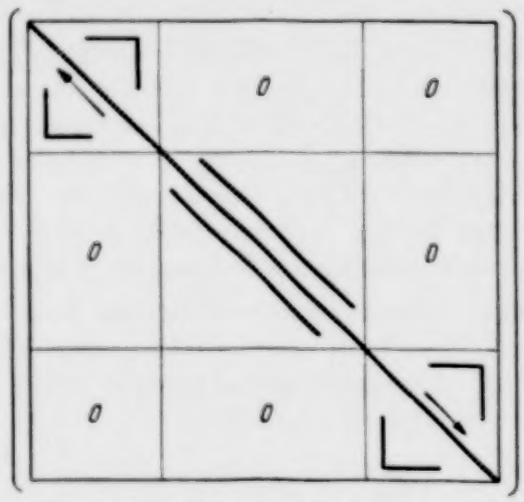

Abb. 14. Die Federungsmatrix $\mathfrak{A}$ einer zweimal verzweigten Welle, schematisch.

3. Die Abbildung durchlaufender Wellen in sich selbst. Wie jedes beliebige Schwingungssystem unter den Voraussetzungen (3) läßt sich natürlich auch eine durchlaufende Welle von n Freiheitsgraden auf ∞^n-fache Weise ihrerseits auf eine andere durchlaufende Welle, also gewissermaßen „in sich selbst" abbilden. Eine solche Abbildung erscheint auf den ersten Blick praktisch wertlos, liefert aber eine recht brauchbare Methode zur Behandlung verzweigter Wellensysteme, wie sie etwa im Motorenbau häufig auftreten. Obwohl von *Grammel* [2] für fast alle in der Praxis vorkommenden Fälle ein einfaches Verfahren zur Berechnung solcher verzweigten Wellen entwickelt worden ist, möge die besondere Art der Abbildung hier kurz erläutert werden.

Beginnt man die Transformation einer durchlaufenden Welle (allgemeiner irgendeines Schwingungssystems der Klassen II und III, auch I, sofern $\mathfrak{B}$ Diagonalmatrix ist) nach den Formeln (15a) mit dem i-ten Einheitsvektor: $\mathfrak{x}_1' = \mathfrak{e}_i'$, so wird die neue Koordinate y_1 gleich der alten Koordinate

[1] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 2, S. 349 und S. 410, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

[2] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, a. a. O. Bd. 2, S. 385.

x_i, wovon man sich leicht überzeugt (siehe auch das gerechnete erste Beispiel). Diesen Umstand machen wir uns folgendermaßen zunutze: wir denken uns die einmal verzweigte Welle nach Abb. 10 kurz vor der Verzweigung durchschnitten, setzen also vorübergehend $C_{r-1,r} = 0$. Nun bilden wir die durchlaufende Welle B so in sich selbst ab, daß die verknüpfende Koordinate x_r gleich y_1 wird, beginnen also die Rekursionsformeln mit $\mathfrak{r}'_1 = \mathfrak{e}'_r$, und hängen nach der Transformation die in sich umgeordnete Welle B mit Hilfe der Drehsteifigkeit $C_{r-1,r}$ wieder an den Wellenteil E an. Die Gesamttransformationsmatrix $(\mathfrak{R}\,\mathfrak{S})_{ges.}$ hat dann die Gestalt von Abb. 12. mit der r-reihigen Einheitsmatrix $\mathfrak{E}_r$. Abb. 11 zeigt schematisch, wie man bei einer doppelten Verzweigung vorzugehen hat; die zugehörige Transformationsmatrix (Abb. 13) enthält in der Mitte die Einheitsmatrix, ferner die beiden Teilmatrizen $(\mathfrak{R}\,\mathfrak{S})_A$ und $(\mathfrak{R}\,\mathfrak{S})_B$, die sich beim Umordnen der abgeschnittenen Teilwellen A und B ergeben. Daß diese Möglichkeit bei der doppelten Verzweigung überhaupt besteht, liegt daran, daß die Rekursionsformeln (15a) sich ja auch rückwärts lesen lassen, d. h. die Dreiermatrix $\mathfrak{G}$ muß nicht unbedingt von links oben nach rechts unten, sie kann auch in umgekehrter Richtung aufgebaut werden. Die Federungsmatrix $\mathfrak{A}$ des zweimal verzweigten Originalsystems von Abb. 11 hat die in Abb. 14 schematisch dargestellte Form. Es wäre nun unzweckmäßig, die Transformation oben rechts oder unten links zu beginnen, weil dabei der ganze bereits dreireihige mittlere Teil der Matrix $\mathfrak{A}$ überflüssigerweise in sich umgeordnet werden müßte. Man läßt daher den mittleren fertigen Teil stehen — in $(\mathfrak{R}\,\mathfrak{S})_{ges.}$ erscheint für diesen Bereich die Einheitsmatrix, die alles ungeändert läßt — und beginnt an den Verzweigungsstellen die Transformation von innen nach außen, wie die Pfeile in Abb. 14 andeuten. Bei drei- und mehrfach verzweigten Wellenanlagen könnte man auf ähnliche Weise vorgehen, indem man verschiedene Zweige abschneidet, umordnet und wieder anhängt, und diesen Vorgang solange wiederholt, bis eine einzige durchlaufende Welle entstanden ist. Es ist indessen ratsam, bei einer mehr als zweimal verzweigten Welle die Transformation insgesamt durchzuführen, was kaum mehr Rechenarbeit erfordert, dafür aber auf jeden Fall übersichtlicher wird.

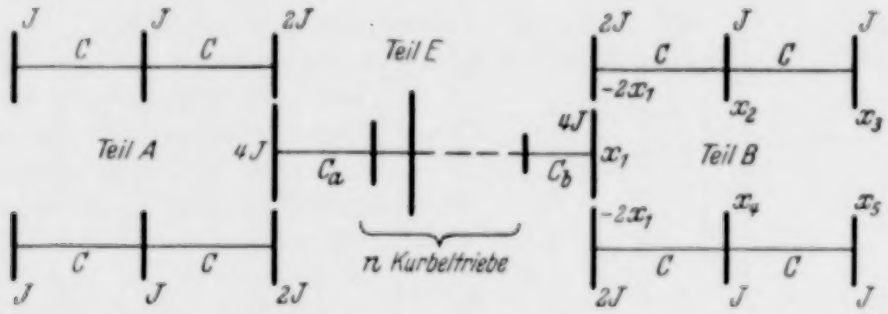

Abb. 15. Zweimal verzweigte Wellenanlage.

Zweites Beispiel. Es sind die Eigenschwingungszahlen der doppelt verzweigten Maschinenanlage nach Abb. 15 zu ermitteln. Man könnte hier Federungs- und Trägheitsmatrix des Gesamtsystems aufstellen und die Transformation in eins durchführen. Es ist aber zweckmäßiger, die soeben besprochene Methode anzuwenden; wir denken uns die Wellenstränge der Drehsteifigkeiten C_a und C_b entfernt und betrachten jeden der abgetrennten Teile A und B für sich. Für den Teil B werden mit den Größen der Abb. 15 in üblicher Weise Federungs- und Trägheitsmatrix zusammengestellt, und zwar ist

$$\mathfrak{A}_B = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{B}_B = \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Der Ausgangsvektor $\mathfrak{r}'_1$ ist natürlich nicht beliebig — er wäre es nur dann, wenn die Transformation für das ganze System insgesamt durchgeführt würde — sondern wir müssen $\mathfrak{r}'_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ wählen, damit die neue Koordinate y_1 gleich der alten x_1 wird; denn sonst könnte man die in sich abgebildete Welle B nicht einfach wieder an das Mittelstück E anhängen. Nach den Rekursions-

formeln (15a) werden nun die weiteren Vektoren $\mathfrak{r}_2' \ldots \mathfrak{r}_5'$:

$d_{11} = 20$,	$-\mathfrak{r}_1' \mathfrak{A}_B \mathfrak{B}_B^{-1}$	$= -8/20$	-2	0	-2	0	} +
	$g_{11} \cdot \mathfrak{r}_1'/d_{11} = 8/20\,\mathfrak{r}_1'$	$= 8/20$	0	0	0	0	}
	$\mathfrak{r}_2'$	$= 0$	-2	0	-2	0	
$d_{22} = -g_{21} = 8$,	$-\mathfrak{r}_2' \mathfrak{A}_B \mathfrak{B}_B^{-1}$	$= 8/20$	4	-2	4	-2	} +
	$g_{22} \cdot \mathfrak{r}_2'/d_{22} = 2\,\mathfrak{r}_2'$	$= 0$	-4	0	-4	0	
	$g_{12} \cdot \mathfrak{r}_1'/d_{11} = -8/20\,\mathfrak{r}_1'$	$= 8/20$	0	0	0	0	}
	$\mathfrak{r}_3'$	$= 0$	0	-2	0	-2	
$d_{33} = -g_{32} = 8$,	$-\mathfrak{r}_3' \mathfrak{A}_B \mathfrak{B}_B^{-1}$	$= 0$	-2	2	-2	2	} +
	$g_{33} \cdot \mathfrak{r}_3'/d_{33} = 1 \cdot \mathfrak{r}_3'$	$= 0$	0	-2	0	-2	
	$g_{23} \cdot \mathfrak{r}_2'/d_{22} = -1 \cdot \mathfrak{r}_2'$	$= 0$	2	0	2	0	}
	$\mathfrak{r}_4'$	$= 0$	0	0	0	0	

Als Ersatzvektor errät man hier leicht, wenn man nicht Formel (35) benutzen will, etwa $\tilde{\mathfrak{r}}_4' = (0, 1, 1, -1, -1)$. Es wird dann $d_{44} = \tilde{\mathfrak{r}}_4' \mathfrak{B} \tilde{\mathfrak{r}}_4 = 4$, und damit fährt man fort:

$d_{44} = 4\ (\neq -g_{43} = 0)$,	$-\mathfrak{r}_4' \mathfrak{A}_B \mathfrak{B}_B^{-1}$	$= 0$	-1	0	1	0	} +
	$g_{44} \cdot \mathfrak{r}_4'/d_{44} = 1/2\,\mathfrak{r}_4'$	$= 0$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	}
$d_{55} = -g_{54} = 1$,	$\mathfrak{r}_5'$	$= 0$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$.	

Das Hauptschema ist

$$
\begin{array}{c|ccccc|ccccc|c}
 & & & & & & & & & & & \mathfrak{R}_B \\
\mathfrak{A}_B & 8 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1/2 & \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1/2 & \\
 & 2 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1/2 & \\
 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1/2 & \\
\hline
\mathfrak{R}_B' & & & & & & & & & & & \mathfrak{G}_B \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 8 & 2 & 0 & 2 & 0 & 8 & -8 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & -2 & 0 & -2 & 0 & & -8 & -4 & 2 & -4 & 2 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & -2 & 0 & -2 & & 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & 0 & -8 & 8 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & -1 & -1 & & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & \\
0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & & 0 & -3/2 & 1 & 3/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5/2 &
\end{array}
$$

Die dreireihige Teilmatrix oben links in $\mathfrak{G}_B$ hat bereits die Endform (4); denn alle Zeilen- und Spaltensummen sind gleich Null. Die zweireihige Restmatrix unten rechts jedoch stellt in der jetzigen Form die Federungsmatrix einer versetzten eingespannten Welle dar, man sieht aber ohne Rechnung, daß nur die fünfte Zeile und Spalte von $\mathfrak{G}_B$ mit dem Faktor 2 multipliziert zu werden braucht, damit auch die vierte Zeilen- und Spaltensumme gleich Null wird; es stimmen also alle Elemente c_{ik} und i_{ii} mit den g_{ik} und d_{ii} überein außer $c_{54} = c_{45}$, c_{55} und i_{55}, und zwar ist nach (23) und (24) $c_{54} = c_{45} = 2\,g_{54} = -2$, $c_{55} = 2^2 g_{55} = 10$ und $i_{55} = 2^2\,d_{55} = 4$. Für 10 schreiben wir $2 + 8$; die Federkonstante des eingespannten Wellenstückes ist dann $8\,C$ nach (4). Abb. 16 zeigt den transformierten Wellenabschnitt B. Da nun der Teil A des Gesamtsystems die gleiche Form hat wie Teil B, so liefert er auch die gleiche Bildwelle, womit sich die

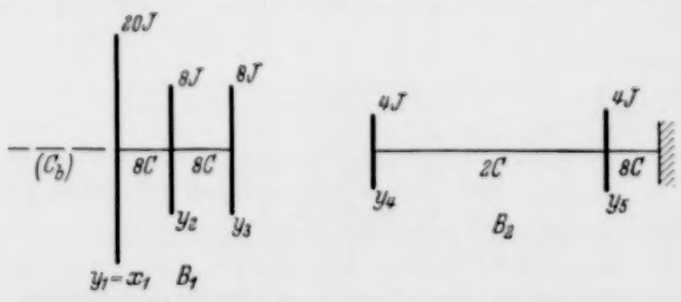

Abb. 16. Bildwelle des Teiles B des Originalsystems von Abb. 15.

zweite Transformation erübrigt. Das Gesamtbild des Originalsystems ist somit das der Abb. 17. Die beiden eingespannten Teilwellen ergeben nach leichter Rechnung oder auch mit Hilfe der angedeuteten *Baranow*konstruktion (Abb. 18) jeweils die Eigenwerte $(3-\sqrt{5})/2$ und $(3+\sqrt{5})/2$, so daß also vier Eigenschwingungszahlen der Gesamtanlage bekannt sind unabhängig von der Beschaffenheit des mittleren Teiles E!

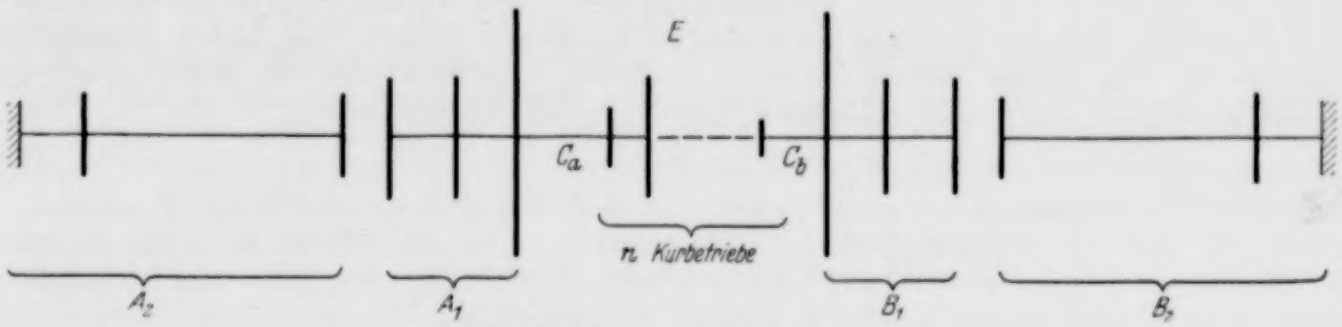

Abb. 17. Bildwelle des Gesamtsystems von Abb. 15.

4. Die Abbildung einer Reihe von Elementarschwingern auf eine durchlaufende Welle. Federungs- und Trägheitsmatrix eines Systems der Klasse IV sind beide von Diagonalgestalt; die Eigenschwingungszahlen lassen sich als $\omega_i^2 = C_i/J_i$ unmittelbar ablesen. Die Transformation nach (15a) und (25), die jetzt kaum noch nennenswerte Rechenarbeit erfordert, gestattet somit, eine durchlaufende Bildwelle mit vorgeschriebenen Eigenschwingungszahlen zu konstruieren, eine Möglichkeit, die in der Mechanik nur theoretischen Wert zu besitzen scheint, in der Elektrotechnik jedoch von einiger Bedeutung ist. Auch *H. Schaefer* [1] hat hierfür eine Methode angegeben.

5. Verallgemeinerungen. Von einigen der bisher gemachten Voraussetzungen wollen wir uns zum Schluß wieder befreien:

1. Die Federungsmatrix $\mathfrak{A}$ des Originalsystems sei indefinit; einige Werte $k_i = \omega_i^2\, C/J$ sind dann negativ, in den Lösungsfunktionen treten somit Ausdrücke der Form $\mathfrak{Cof}\,\omega_i t$ und $\mathfrak{Sin}\,\omega_i t$ auf: die Schwingung ist nicht mehr stabil. Die dann ebenfalls indefinite Matrix $\mathfrak{G}$ berechnet man nach den Rekursionsformeln (15a) wie sonst auch. Vor der Berechnung der Größen s_i aus (25) jedoch führt man eine sogenannte „Spektralverschiebung" der Eigenwertskala durch, d. h. man bildet die neue Matrix

$$\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G} + t\,\mathfrak{D} \quad (t \text{ positiv reell}). \qquad (37)$$

Die Eigenwerte des Paares $\mathfrak{G}^*, \mathfrak{D}$ sind sämtlich um t größer als die des Paares $\mathfrak{G}, \mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, also nicht negativ, wenn man nur t groß genug wählt, z. B. sicher dann, wenn

$$t \geq n \mid h_{ik} \mid_{max}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{D}^{-1}\,\mathfrak{G}, \qquad (38)$$

nach einer bekannten Abschätzung für den maximalen Betrag von Eigenwerten. Nach (38) bildet man zunächst die Matrix $\mathfrak{H}$, indem man die Zeilen von $\mathfrak{G}$ der Reihe nach durch $d_{11}, \ldots d_{nn}$ dividiert, sucht das dem Betrage nach größte Element in $\mathfrak{H}$ heraus und multipliziert es mit der Ordnungszahl n der Matrix $\mathfrak{G}$. Dieser Wert wird zweckmäßig nach oben zu einer ganzen Zahl aufgerundet.

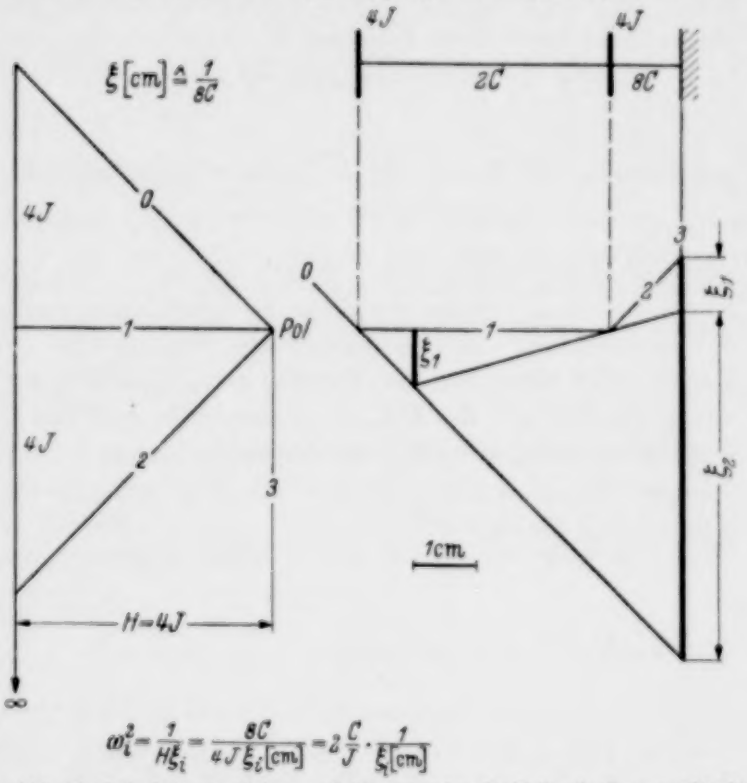

Abb. 18. Seileckskonstruktion nach *Baranow* für die Teilwelle B_2 von Abb. 16 bzw. 17.

2. Die Federungsmatrix $\mathfrak{A}$ sei negativ (halb)definit. Es handelt sich also nicht mehr um ein Schwingungssystem im Sinne des Wortes, da keiner der Werte ω_i^2 positiv ist. In diesem Fall rechnet

[1] *H. Schaefer*, Vorlesungsmanuskript 1954.

man einfach mit dem Paare $-\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, dessen Eigenwerte gleich $-k_i$, also sämtlich nichtnegativ sind, und verfährt wie sonst.

3. Die Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien jetzt komplex Hermitesch, $\mathfrak{B}$ außerdem positiv definit, wie es zum Beispiel bei den Anwendungen in der Elektrotechnik häufig vorkommt:

$$\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}', \quad \mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}}', \quad \mathfrak{B} \text{ positiv definit}. \tag{39}$$

Der Querstrich bedeutet Übergang zu konjugiert komplexen Größen. Alle bisher abgeleiteten Formeln und Folgerungen gelten wortwörtlich auch hier, wenn man unter den Bilinearformen g_{ik} und d_{ik} die mit den konjugiert komplexen Vektoren $\bar{\mathfrak{r}}_i'$ gebildeten Ausdrücke

$$g_{ik} = \bar{\mathfrak{r}}_i' \mathfrak{A} \mathfrak{r}_k \quad \text{und} \quad d_{ik} = \bar{\mathfrak{r}}_i' \mathfrak{B} \mathfrak{r}_k \tag{40}$$

versteht. Die Hauptdiagonalelemente d_{ii} und g_{ii} sind als Hermitesche quadratische Formen stets reell, somit sind es nach (19) auch die Nebendiagonalelemente von $\mathfrak{G}$. Die Matrix $\mathfrak{R}$ dagegen wird im allgemeinen komplex sein. Da nun schiefhermitesche (im Reellen schiefsymmetrische) Matrizen durch Multiplikation mit der imaginären Einheit i in Hermitesche übergehen, rechnet man mit den Paaren $i\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ (ik reell) oder $i\mathfrak{A}, i\mathfrak{B}$ (k reell), je nachdem, ob nur eine oder beide Matrizen des Paares $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ schiefhermitesch sind.

4. Sehen wir schließlich ganz von der physikalischen Bedeutung der Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ab, so genügt es, wenn entweder $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ negativ oder positiv definit ist; man braucht ja nur $1/k$ bzw. $-1/k$ als neue Eigenwerte einzuführen.

Zusammenfassend läßt sich dann sagen: Die Transformation des gegebenen Paares $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ auf das reelle Paar $\mathfrak{C}, \mathfrak{J}$ und somit die zeichnerische Lösung des Eigenwertproblems nach *Baranow-Schaefer* gelingt stets, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

a) Jede der beiden Matrizen des Paares ist entweder Hermitesch oder schiefhermitesch (insbesondere im Reellen symmetrisch oder schiefsymmetrisch).

b) Eine der beiden Matrizen des Paares ist positiv oder negativ definit.

Die Voraussetzung b) läßt sich im allgemeinen nicht entbehren, da die quadratischen Formen in den Nennern der Rekursionsformeln (15a) nicht Null werden dürfen; doch ist es durchaus möglich, daß bei glücklicher Wahl von $\mathfrak{r}_1'$ die Transformation wie im Regelfalle vonstatten geht, auch wenn keine der beiden Matrizen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ definit war.

5. Bislang haben wir nur von der freien Schwingung mit der Bewegungsgleichung

$$\mathfrak{B}\ddot{\mathfrak{x}} + \mathfrak{A}\mathfrak{x} = 0 \tag{41}$$

gesprochen. Oft lautet die Aufgabe allgemeiner, nämlich

$$\mathfrak{B}\ddot{\mathfrak{x}} + \mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{p} \tag{42}$$

mit beliebiger rechter Seite $\mathfrak{p}$. Die Komponenten von $\mathfrak{p}$ sind z. B. konstant, wenn die gewählten Koordinaten x_i für die statische Gleichgewichtslage des Systems Null sind, diese aber nicht mit der entspannten Lage zusammenfällt (sogenannte „Vorspannungen"). Greifen äußere periodische Kräfte oder Momente am System an („Erzwungene Schwingungen"), so sind die Komponenten von $\mathfrak{p}$ Funktionen der Zeit, gegebenenfalls auch des Ortes usw. Führen wir nun in (42) die Transformationsvorschrift (20) ein, so wird

$$\mathfrak{B}\mathfrak{R}\mathfrak{S}\ddot{\mathfrak{z}} + \mathfrak{A}\mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{z} = \mathfrak{p}. \tag{43}$$

Dies von links mit $\mathfrak{S}'\mathfrak{R}'$ multipliziert ergibt

$$\mathfrak{S}'\mathfrak{R}'\mathfrak{B}\mathfrak{R}\mathfrak{S}\ddot{\mathfrak{z}} + \mathfrak{S}'\mathfrak{R}'\mathfrak{A}\mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{z} = \mathfrak{S}'\mathfrak{R}'\mathfrak{p}, \tag{44}$$

oder nach (11), (23) und (24)

$$\mathfrak{J}\ddot{\mathfrak{z}} + \mathfrak{C}\mathfrak{z} = \mathfrak{S}'\mathfrak{R}'\mathfrak{p}, \tag{45}$$

und das heißt: der Vektor $\mathfrak{p}$ am Originalsystem transformiert sich in den Vektor $\mathfrak{S}'\mathfrak{R}'\mathfrak{p}$ an der durchlaufenden Bildwelle. Da nach der Transformation $\mathfrak{S}'\mathfrak{R}'\mathfrak{p}$ leicht zu berechnen ist, lassen sich damit auch sämtliche für die inhomogene Schwingungsgleichung der durchlaufenden Welle entwickelten Verfahren auf die inhomogenen Systeme der allgemeineren Klasse I ausdehnen.

(Eingegangen am 23. Oktober 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Sigurd Falk*, Braunschweig, Celler Str. 93a.

Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls*

Von H. Fuhrke

1. Einleitung, Bezeichnungen. Wenn man von komplizierten mechanischen Systemen die höheren Eigenfrequenzen bestimmen will, muß man das für die Rechnung benützte Ersatzsystem dem wirklichen sehr weit annähern. Ein Mittel, diese Annäherung bei geeignet gegliederten Tragwerken sehr weit zu treiben, ist der Matrizen-Kalkül, der es erlaubt, die Rand- und Übergangsbedingungen besonders übersichtlich zu formulieren. Dabei können, wenn das Tragwerk aus Balken besteht, außer Biegeelastizität und Massenträgheit (Ziff. 2) auch Schubelastizität und Rotationsträgheit berücksichtigt werden (Ziff. 3). Eine Unbequemlichkeit, die auch der gewöhnliche Matrizen-Kalkül nicht vermeidet, daß nämlich bei ausgearteten Systemen (sehr große Massen, sehr steife Stützen) in der Enddeterminante Differenzen großer Zahlen auftauchen, läßt sich durch den Übergang auf Determinanten-Matrizen (Ziff. 6) vermeiden. Auch Eigenschwingungsformen (Ziff. 9) sowie die Verformung und Beanspruchung bei erzwungenen Schwingungen (Ziff. 10) und unter statischer Last (Ziff. 11) lassen sich mit Hilfe der Matrizen ermitteln. Ein Beispiel, die Bestimmung der Biegekritischen eines Maschinenläufers, zeigt den Rechnungsgang (Ziff. 12). Über die Erweiterung der Methode für ebene und räumliche Rahmentragwerke soll ein zweiter Teil berichten.

Den positiven Achsen x, y, z eines Rechtskoordinatensystems seien positive Verschiebungen u, v, w und der positiven x-Achse ein positiver Torsionsdrehwinkel χ zugeordnet. Schnittkräfte seien dann positiv, wenn ihre Vektoren und die Außennormale n_F der betreffenden Schnittfläche beide in positive oder beide in negative Koordinatenrichtungen fallen. Ein homogenes Balkenstück sei als Feld bezeichnet, mehrere Felder, z. B. zwischen zwei Lagern, seien zu einem Abschnitt zusammengefaßt. Auf die Stelle i folge in x-Richtung das Feld i oder der Abschnitt i.

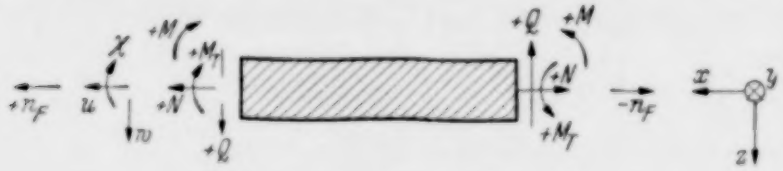

Abb. 1.

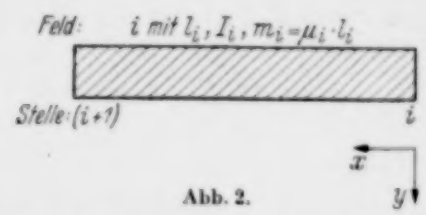

Abb. 2.

2. Matrizengleichung für die Querschwingungen eines homogenen Balkenstücks. Aus den dynamischen Grundgleichungen $\mu\,\ddot{w} = Q'$, $M' = Q$ für das Balkenelement und dem Elastizitätsgesetz $w'' = -M/EI$ für den gebogenen Balken ergibt sich die Differentialgleichung für die Schwingungen des homogenen Balkens: $EI\,w^{IV} = -\mu\,\ddot{w}$, die mit dem Eigenschwingungsansatz $w(x,t) = w(x)\,e^{i\omega t}$ übergeht in

$$w^{IV} - \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 w = 0\,, \quad \text{mit} \quad \lambda^4 = \frac{\omega^2 \mu}{EI}\,l^4\,, \tag{1}$$

wo w nunmehr nur noch ortsabhängig ist. Hierbei bedeutet μ Masse der Längeneinheit, l die Länge, E den Elastizitätsmodul und I das Flächenträgheitsmoment des Balkenfeldes. Schubelastizität und Rotationsträgheit sind zunächst nicht berücksichtigt. Die vier Konstanten des Lösungsansatzes zu (1) lassen sich durch die vier mechanischen Größen

$$\left.\begin{aligned} &\text{Verschiebung } w, \quad \text{Neigung } \psi = w', \\ &\text{Moment } M = -EI\,w'', \quad \text{Querkraft } Q = -EI\,w''' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

am Rand i ($x = 0$, Abb. 2) ausdrücken, wenn man die vier Grundlösungen $\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda}{l}\,x$, $\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda}{l}\,x$, $\cos\frac{\lambda}{l}\,x$, $\sin\frac{\lambda}{l}\,x$ geeignet kombiniert:

$$\left.\begin{aligned} w(x) = {} & w_i \frac{1}{2}\left(\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda}{l}\,x + \cos\frac{\lambda}{l}\,x\right) + \psi_i\,l\,\frac{1}{2\lambda}\left(\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda}{l}\,x + \sin\frac{\lambda}{l}\,x\right) \\ & - M_i\,\frac{l^2}{EI}\,\frac{1}{2\lambda^2}\left(\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda}{l}\,x - \cos\frac{\lambda}{l}\,x\right) - Q_i\,\frac{l^3}{EI}\,\frac{1}{2\lambda^3}\left(\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda}{l}\,x - \sin\frac{\lambda}{l}\,x\right). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

* Auszug aus der Dissertation des Verfassers, Darmstadt 1953, Referent: Prof. Dr.-Ing. *K. Marguerre*, Korreferent: Prof. Dr.-Ing. *K. Karas*.

Durch Ableitung erhält man hieraus die übrigen Größen ψ, M und Q an der Stelle x. Setzt man $x = l$ und führt die Funktionen[1]

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}\left(\mathfrak{Cof}\,\lambda + \cos\lambda\right) = 1 + \frac{\lambda^4}{4!} + \frac{\lambda^8}{8!} + \frac{\lambda^{12}}{12!} + \cdots, \\ S &= \frac{1}{2\lambda}\left(\mathfrak{Sin}\,\lambda + \sin\lambda\right) = 1 + \frac{\lambda^4}{5!} + \frac{\lambda^8}{9!} + \cdots, \\ c &= \frac{1}{2\lambda^2}\left(\mathfrak{Cof}\,\lambda - \cos\lambda\right) = \frac{1}{2} + \frac{\lambda^4}{6!} + \frac{\lambda^8}{10!} + \cdots, \\ s &= \frac{1}{2\lambda^3}\left(\mathfrak{Sin}\,\lambda - \sin\lambda\right) = \frac{1}{6} + \frac{\lambda^4}{7!} + \frac{\lambda^8}{11!} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ein, so erhält man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} w_{i+1} &= C\,w_i + S\,l\,\psi_i + c\left(-\frac{l^2 M_i}{EI}\right) + s\left(-\frac{l^3 Q_i}{EI}\right), \\ l\,\psi_{i+1} &= \lambda^4 s\,w_i + C\,l\,\psi_i + S\left(-\frac{l^2 M_i}{EI}\right) + c\left(-\frac{l^3 Q_i}{EI}\right), \\ -\frac{l^2 M_{i+1}}{EI} &= \lambda^4 c\,w_i + \lambda^4 s\,l\,\psi_i + C\left(-\frac{l^2 M_i}{EI}\right) + S\left(-\frac{l^3 Q_i}{EI}\right), \\ -\frac{l^3 Q_{i+1}}{EI} &= \lambda^4 S\,w_i + \lambda^4 c\,l\,\psi_i + \lambda^4 s\left(-\frac{l^2 M_i}{EI}\right) + C\left(-\frac{l^3 Q_i}{EI}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dieses Gleichungssystem verbindet die vier (dimensionsgleichen) mechanischen Größen w, $l\psi$, $\frac{l^2}{EI}M$, $\frac{l^3}{EI}Q$ am linken Rand mit denen am rechten Rand. Wir können es als Matrizengleichung schreiben und wollen es dabei zugleich insofern verallgemeinern, als wir zulassen, daß die Bezugsgrößen $\bar{l}$ und $\overline{EI}$ nicht die des gerade betrachteten Feldes sind [2]. Nennen wir

$$\bar{l}\,\psi_i \equiv \bar{\psi}_i, \qquad -\frac{\bar{l}^2}{\overline{EI}} M_i \equiv \bar{M}_i, \qquad -\frac{\bar{l}^3}{\overline{EI}} Q_i \equiv \bar{Q}_i \tag{6}$$

und führen

$$\frac{EI_i}{\overline{EI}} = \alpha_i, \qquad \frac{l_i}{\bar{l}} = \beta_i \tag{7}$$

ein, so kommt

$$\begin{bmatrix} w \\ \bar{\psi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} C & \beta S & \frac{\beta^2}{\alpha} c & \frac{\beta^3}{\alpha} s \\ \frac{\lambda^4}{\beta} s & C & \frac{\beta}{\alpha} S & \frac{\beta^2}{\alpha} c \\ \frac{\lambda^4 \alpha}{\beta^2} c & \frac{\lambda^4 \alpha}{\beta} s & C & \beta S \\ \frac{\lambda^4 \alpha}{\beta^3} S & \frac{\lambda^4 \alpha}{\beta^2} c & \frac{\lambda^4}{\beta} s & C \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} w \\ \bar{\psi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_i . \tag{8}$$

Symbolisch kann man dafür schreiben

$$[\mathfrak{y}_{i+1}] = [\quad \mathfrak{R}_i \quad] \cdot [\,\mathfrak{y}_i\,], \tag{8'}$$

indem man die vier Größen w, $\bar{\psi}$, $\bar{M}$ und $\bar{Q}$ als Komponenten eines (Spalten-)Vektors $\mathfrak{y}$ auffaßt. Die Funktionszeichen C_i usw. in (8) bedeuten $\frac{1}{2}\mathfrak{Cof}\,\lambda_i + \cdots$ mit $\lambda_i^4 = \omega^2 \mu_i l_i^4 / EI_i$.

Die Matrix $\mathfrak{R}$ sei im folgenden kurz als *Rayleigh*-Matrix bezeichnet, da sie sich wesentlich aus den *Rayleigh*schen Funktionen aufbaut. Sie ist symmetrisch zur Nebendiagonalen; der Wert ihrer

[1] Die Funktionen (4) sind, von den λ-Potenzen im Nenner abgesehen, als *Rayleigh*funktionen bekannt; vgl. *K. W. Wagner*, Schwingungen und Wellen, S. 373, Wiesbaden 1947.

[2] Es ist durchaus möglich, EI_i und l_i als Bezugsgrößen zu verwenden; man muß dann aber bei mehrfeldrigen Systemen besondere Übergangsmatrizen einführen [s. *W. Schnell*, Z. angew. Math. Mech. 35 (1955), S. 272.]

Determinante ist $|\mathfrak{R}| = 1$. Sie ist gleich ihrer Kehrmatrix $\mathfrak{R}^{-1}$ bis auf die Vorzeichen, die schachbrettartig verteilt sind, wobei das erste Element (links oben) mit $+$ beginnt[1].

Die Funktionen (4) lassen sich durch gut konvergierende Reihen darstellen; für $\lambda = 1$ und 8 Stellen Genauigkeit reichen z. B. die 3 ersten Glieder aus.

3. Matrix für Balkenquerschwingungen bei Mitberücksichtigung von Schubelastizität und Rotationsträgheit. Wir wollen die Matrix $\mathfrak{R}$ für Balkenbiegeschwingungen noch erweitern auf den Fall, daß Schubelastizität und Rotationsträgheit nicht vernachlässigt werden dürfen. Beide Einflüsse haben zur Folge, daß in der Differentialgleichung auch die zweite Ableitung w'' auftritt, und daß infolgedessen die charakteristische Gleichung zwei Lösungen λ_1 und λ_2 aufweist, so daß wir nicht mit den einfachen Funktionen (4) auskommen. Dagegen bleibt der übersichtliche Aufbau der Matrix $\mathfrak{R}$ erhalten.

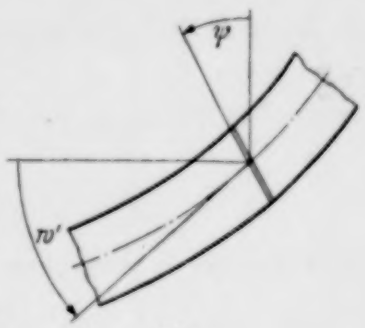

Abb. 3.

Äußere und innere Dämpfung ließe sich durch eine komplexe „Masse" $\mu\,(1 - i\,k_1/\omega\,\mu)$, einen komplexen „$E$-Modul" $E\,(1 + i\,\omega\,k_2)$ und einen komplexen „Gleitmodul" $G\,(1 + i\,\omega\,k_3)$ erfassen[2]. In der folgenden Herleitung sei die Dämpfung aber nicht mitgenommen.

Bei der Aufstellung der Differentialgleichung müssen wir unterscheiden zwischen der Neigung ψ des nach der Verformung schief stehenden Balkenquerschnitts gegen die Vertikale und der Neigung w' der Balkenmittellinie gegen die Horizontale (Abb. 3). Ihre Differenz $(w' - \psi)$ ist die Schubverformung. Die Elastizitätsaussagen lauten dann[3]

$$-M = EI\,\psi', \quad Q = GF_S\,(w' - \psi)\,. \tag{9}$$

Die Bewegungsgleichungen sind

$$\mu\,\ddot{w} = Q', \qquad \mu\,i_\Theta^2\,\ddot{\psi} = Q - M'\,. \tag{10}$$

Für die harmonischen Schwingungen haben wir also die vier symmetrisch gebauten homogenen, linearen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \psi' &= -\frac{M}{EI}, & w' - \psi &= \frac{Q}{GF_S}, \\ Q' &= -\omega^2\,\mu\,w, & M' - Q &= \omega^2\,\mu\,i_\Theta^2\,\psi, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

die man unmittelbar durch den e-Ansatz lösen könnte. Es ist aber übersichtlicher, drei der Unbekannten zu eliminieren. Zunächst erhalten wir, wenn wir die erste und die dritte Gleichung (11) in die einmal differenzierte zweite Gleichung (11) einsetzen,

$$w'' + \frac{\omega^2\,\mu}{GF_S}\,w + \frac{1}{EI}\,M = 0\,; \tag{12 a}$$

genau so ergibt sich, wenn wir die vierte Gleichung (11) differenzieren und die erste und die dritte einsetzen,

$$M'' + \frac{\omega^2\,\mu\,i_\Theta^2}{EI}\,M + \omega^2\,\mu\,w = 0\,. \tag{12 b}$$

Aus den beiden Gleichungen (12a) und (12b) folgt[4] schließlich durch Elimination von M die Differentialgleichung für w

$$w^{\mathrm{IV}} + \frac{\omega^2\,\mu}{EI}\left(\frac{EI}{GF_s} + i_\Theta^2\right) w'' - \frac{\omega^2\,\mu}{EI}\left(1 - \frac{\omega^2\,\mu\,i_\Theta^2}{GF_S}\right) w = 0\,. \tag{13}$$

Mit $\hat{\lambda}$ (1), wobei wir statt λ hier lieber λ_0 schreiben wollen, sowie mit

$$\delta = \frac{EI}{l^2\,GF_S} = \frac{E}{G}\,\frac{F}{F_s}\left(\frac{i}{l}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad \vartheta = \frac{i_\Theta^2}{l^2} \tag{14}$$

---

[1] Wegen weiterer Eigenschaften dieser Matrix vgl. die Dissertation von *W. Schnell*, T. H. Darmstadt 1954 „Krafteinleitung in versteifte Zylinderschalen". ZFW 1955.

[2] *K. W. Wagner*, a. a. O., S. 262 und 370; *L. Cremer*, Vierpoldarstellung und Resonanzkurven bei schwingenden Stäben, SB. d. pr. Akad. d. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1934. I.

[3] Vgl. z. B. *K. Marguerre*, Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs, S. 57, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.

[4] Z. B. *S. Timoshenko*, Vibration Problems in Engineering, S. 338, New York 1937; *W. Prager*- u. *K. Hohenemser*, Dynamik der Stabwerke, S. 118 f., Berlin 1933.

lautet (13)

$$w^{\mathrm{IV}} + \frac{\lambda_0^4}{l^2}\left(\delta + \vartheta\right) w'' - \frac{\lambda_0^4}{l^4}\left(1 - \lambda_0^4\,\delta\,\vartheta\right) w = 0\,. \tag{15}$$

Dieselbe Gleichung erhält man auch für ψ, M und Q.

Läßt man den Schubeinfluß und die Rotationsträgheit beiseite, setzt also $GF_S = \infty$ und $i_\Theta = 0$, so wird $\delta = 0$ und $\vartheta = 0$, und aus (15) wird die Gleichung (1). Nur einen der beiden Einflüsse zu vernachlässigen, bringt mathematisch keine wesentliche Vereinfachung.

Der e-Ansatz $w = c_k\, e^{\lambda \frac{x}{l}}$ führt auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda^8 + \lambda_0^4\,(\delta + \vartheta)\,\lambda^2 - \lambda_0^4\,(1 - \lambda_0^4\,\delta\,\vartheta) = 0\,, \tag{16}$$

deren Wurzeln $\pm\lambda_1$ und $\pm i\,\lambda_2$ sind mit

$$\lambda_2^1 = +\lambda_0 \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\,\lambda_0^4\,(\delta - \vartheta)^2} \mp \frac{1}{2}\,\lambda_0^2\,(\delta + \vartheta)}\,. \tag{17}$$

Zwischen den Wurzeln bestehen die Beziehungen

$$\lambda_2^2 - \lambda_1^2 = \lambda_0^4\,(\delta + \vartheta) \qquad \text{und} \qquad \lambda_1^2\,\lambda_2^2 = \lambda_0^4\,(1 - \lambda_0^4\,\delta\,\vartheta)\,. \tag{18}$$

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, die vier Integrationskonstanten des e-Ansatzes durch die vier Randwerte von w, $\overline{\psi}$, $\overline{M}$ und $\overline{Q}$ auszudrücken. Das wird am einfachsten, wenn wir von dem Ansatz

$$\overline{Q} = c_1\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\frac{x}{l} + c_2\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\frac{x}{l} + c_3\cos\lambda_2\frac{x}{l} + c_4\sin\lambda_2\frac{x}{l} \tag{19a}$$

für die Querkraft ausgehen. Aus der dritten Gleichung (11) erhalten wir

$$w = \frac{l}{\lambda_0^4}\,\overline{Q}' = \frac{1}{\lambda_0^4}\left(c_1\,\lambda_1\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\frac{x}{l} + c_2\,\lambda_1\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\frac{x}{l} - c_3\,\lambda_2\sin\lambda_2\frac{x}{l} + c_4\,\lambda_2\cos\lambda_2\frac{x}{l}\right), \tag{19b}$$

wobei $\overline{l} = l$ und $\overline{EI} = EI$ die speziellen Größen des betrachteten Feldes sein sollen. Aus der zweiten Gleichung (11) kommt

$$\begin{aligned}\overline{\psi} = l\,w' + \delta\,\overline{Q} = \frac{1}{\lambda_0^4}\Big[&(\lambda_1^2 + \delta\,\lambda_0^4)\left(c_1\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\frac{x}{l} + c_2\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\frac{x}{l}\right)\\ &- (\lambda_2^2 - \delta\,\lambda_0^4)\left(c_3\cos\lambda_2\frac{x}{l} + c_4\sin\lambda_2\frac{x}{l}\right)\Big]\,;\end{aligned} \tag{19c}$$

schließlich liefert die erste Gleichung (11)

$$\begin{aligned}\overline{M} = l\,\overline{\psi}' = \frac{1}{\lambda_0^4}\Big[&(\lambda_1^2 + \delta\,\lambda_0^4)\,\lambda_1\left(c_1\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\frac{x}{l} + c_2\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\frac{x}{l}\right)\\ &+ (\lambda_2^2 - \delta\,\lambda_0^4)\,\lambda_2\left(c_3\sin\lambda_2\frac{x}{l} - c_4\cos\lambda_2\frac{x}{l}\right)\Big]\,.\end{aligned} \tag{19d}$$

Wenn wir in den Gleichungen (19a) bis (19d) $x = 0$ setzen, erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \overline{Q}_i &= c_1 + c_3\,, & \overline{\psi}_i &= \frac{1}{\lambda_0^4}\left[(\lambda_1^2 + \delta\lambda_0^4)\,c_1 - (\lambda_2^2 - \delta\lambda_0^4)\,c_3\right],\\ w_i &= \frac{1}{\lambda_0^4}\left(\lambda_1\,c_2 + \lambda_2\,c_4\right), & \overline{M}_i &= \frac{1}{\lambda_0^4}\left[(\lambda_1^2 + \delta\,\lambda_0^4)\,\lambda_1\,c_2 - (\lambda_2^2 - \delta\,\lambda_0^4)\,\lambda_2\,c_4\right]. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Wir führen noch die Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_0 &= \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \frac{1}{\lambda_0^2\sqrt{4 + \lambda_0^4\,(\delta - \vartheta)^2}}\,,\\ \Lambda_1 &= \frac{\lambda_1^2 + \delta\,\lambda_0^4}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\lambda_0^2(\delta - \vartheta)}{\sqrt{4 + \lambda_0^4(\delta - \vartheta)^2}}\right],\\ \Lambda_2 &= \frac{\lambda_2^2 - \delta\,\lambda_0^4}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\lambda_0^2(\delta - \vartheta)}{\sqrt{4 + \lambda_0^4(\delta - \vartheta)^2}}\right], \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

zwischen denen die Beziehungen

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = 1 \quad \text{und} \quad \Lambda_1\,\Lambda_2 = \Lambda_0^2\,\lambda_0^4 \tag{22}$$

bestehen, und erhalten

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \lambda_0^4 \Lambda_0 \bar{\psi}_i + \Lambda_2 \bar{Q}_i\,, & c_3 &= -\lambda_0^4 \Lambda_0 \bar{\psi}_i + \Lambda_1 \bar{Q}_i\,, \\ c_2 &= \frac{\lambda_0^4}{\lambda_1} \Lambda_2 w_i + \frac{\lambda_0^4}{\lambda_1} \Lambda_0 \bar{M}_i\,, & c_4 &= \frac{\lambda_0^4}{\lambda_2} \Lambda_1 w_i - \frac{\lambda_0^4}{\lambda_2} \Lambda_0 \bar{M}_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Setzen wir endlich diese Konstanten in (19 a) bis (19 d) ein, so entstehen daraus für $x = l$ vier Gleichungen zwischen den Größen w, $\bar{\psi}$, $\bar{M}$ und $\bar{Q}$ am rechten Rand i und denen am linken Rand $i+1$.

Die so gewonnenen Gleichungen lassen sich wieder zu einer sehr übersichtlichen Matrizengleichung zusammenfassen, wenn wir die folgenden neun Funktionen einführen:

$$\left.\begin{aligned} C_{\mathrm{I}} &= \Lambda_2 \mathfrak{Cof}\,\lambda_1 + \Lambda_1 \cos\lambda_2 \\ C_{\mathrm{II}} &= \Lambda_1 \mathfrak{Cof}\,\lambda_1 + \Lambda_2 \cos\lambda_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{für } \delta = 0 \text{ und } \vartheta = 0: \rightarrow \frac{1}{2}(\mathfrak{Cof}\,\lambda_0 + \cos\lambda_0)\,,$$

$$\left.\begin{aligned} S_{\mathrm{I}} &= \Lambda_0(\lambda_1 \mathfrak{Sin}\,\lambda_1 + \lambda_2 \sin\lambda_2) \\ S_{\mathrm{II}} &= \frac{\Lambda_1}{\lambda_1} \mathfrak{Sin}\,\lambda_1 + \frac{\Lambda_2}{\lambda_2} \sin\lambda_2 \\ S_{\mathrm{III}} &= \frac{\Lambda_2}{\lambda_1} \mathfrak{Sin}\,\lambda_1 + \frac{\Lambda_1}{\lambda_2} \sin\lambda_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{1}{2\lambda_0}(\mathfrak{Sin}\,\lambda_0 + \sin\lambda_0)\,,$$

$$c = \Lambda_0(\mathfrak{Cof}\,\lambda_1 - \cos\lambda_2) \rightarrow \frac{1}{2\lambda_0^2}(\mathfrak{Cof}\,\lambda_0 - \cos\lambda_0)\,,$$

$$\left.\begin{aligned} s_{\mathrm{I}} &= \frac{1}{\lambda_0^4}(\lambda_1 \Lambda_2 \mathfrak{Sin}\,\lambda_1 - \lambda_2 \Lambda_1 \sin\lambda_2) \\ s_{\mathrm{II}} &= \Lambda_0\left(\frac{1}{\lambda_1} \mathfrak{Sin}\,\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} \sin\lambda_2\right) \\ s_{\mathrm{III}} &= \frac{1}{\lambda_0^4}(\lambda_1 \Lambda_1 \mathfrak{Sin}\,\lambda_1 - \lambda_2 \Lambda_2 \sin\lambda_2) \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{1}{2\lambda_0^3}(\mathfrak{Sin}\,\lambda_0 - \sin\lambda_0)\,. \tag{24}$$

Mit (24) erhalten wir dann die Matrizengleichung für die Querschwingungen eines homogenen Balkenfeldes unter Berücksichtigung von Eigenmasse μ und Rotationsträgheit $\mu\, i_\Theta^2$, Biegesteifigkeit EI und Schubsteifigkeit GF_s:

$$\begin{bmatrix} w \\ \bar{\psi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} C_{\mathrm{I}} & S_{\mathrm{I}} & c & s_{\mathrm{I}} \\ \lambda_0^4 s_{\mathrm{II}} & C_{\mathrm{II}} & S_{\mathrm{II}} & c \\ \lambda_0^4 c & \lambda_0^4 s_{\mathrm{III}} & C_{\mathrm{II}} & S_{\mathrm{I}} \\ \lambda_0^4 S_{\mathrm{III}} & \lambda_0^4 c & \lambda_0^4 s_{\mathrm{II}} & C_{\mathrm{I}} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} w \\ \bar{\psi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_i, \tag{25}$$

oder kurz

$$[\mathfrak{y}_{i+1}] = [\mathfrak{U}_i] \cdot [\mathfrak{y}_i]\,. \tag{26}$$

Die Matrix $\mathfrak{U}$ ist ebenso wie $\mathfrak{R}$ in (8) symmetrisch zur Nebendiagonalen. Ihre Determinante ist 1, ihr Kehrwert entsteht durch Vorzeichen-Umkehr bei den Elementen mit ungerader Zeigersumme. Bei Beziehung auf ein „fremdes" $\overline{EI}$ und $\bar{l}$ treten zu den einzelnen Elementen dieselben α- und β-Potenzen wie in (8). Als Sonderfälle erhalten wir

a) für $\mu_i = 0$, d. h. für das masselose Balkenfeld, mit $\lambda_0 = 0$, die Elastizitätsmatrix, gleich erweitert im Sinne von (7) und (8):

$$\mathfrak{E}_i = \begin{bmatrix} 1 & \beta & \frac{\beta^2}{2\alpha} & \frac{\beta^3}{\alpha}\left(\frac{1}{6} - \delta\right) \\ 0 & 1 & \frac{\beta}{\alpha} & \frac{\beta^2}{2\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i, \tag{27}$$

b) für $l_i \to 0$, wobei aber gleichzeitig $\mu_i l_i \to m_i$ gehen soll, d. h. für das zu einer Einzelmasse zusammengeschrumpfte Balkenstück die Massenmatrix:

$$\mathfrak{M}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Theta_i \omega^2 \bar{l}/\overline{EI} & 1 & 0 \\ m_i \omega^2 \bar{l}^3/\overline{EI} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

(Die Matrizen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ lassen sich auch unmittelbar aus den Elastizitätsaussagen und den dynamischen Grundgleichungen für den Balken mit Einzelmasse finden.)

4. Abschnittsmatrix. Besteht ein Balkenabschnitt aus mehreren homogenen, jedoch voneinander verschiedenen Feldern und werden an den Übergangsstellen $i+1$ bis $k-1$ keine äußeren Kräfte z. B. durch Lager, eingeleitet, so gilt an jeder Übergangsstelle $\mathfrak{y}_j$ links $= \mathfrak{y}_j$ rechts, und man erhält mit (19) die Abschnittsmatrix $\mathfrak{A}$ nach den Regeln der Matrizenmultiplikation[1] (Abb. 4), aus

$$[\mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}_{k-1}] \dots [\mathfrak{A}_{i+1}] \cdot [\mathfrak{A}_i], \tag{29}$$

womit

$$[\mathfrak{y}_k] = [\mathfrak{A}] \cdot [\mathfrak{y}_i] \tag{30}$$

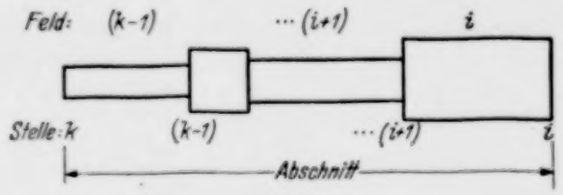

Abb. 4.

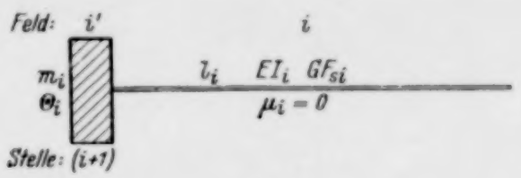

Abb. 5.

wird. Hiernach läßt sich z. B. aus (27) und (28) die Matrix $\mathfrak{T}$ für ein Balkenstück gewinnen, das aus einem elastischen, masselosen Feld und einer anschließenden konzentrierten Einzelmasse besteht[2] (Abb. 5), als Summe zweier Matrizen geschrieben:

$$\mathfrak{T}_i = \mathfrak{M}_{i'} \cdot \mathfrak{E}_i = \frac{\bar{l}^3}{\overline{EI}} \omega^2 m_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \vartheta & -\frac{\beta^3}{\alpha}\vartheta & -\frac{\beta^4}{2\alpha}\vartheta \\ 1 & \beta & \frac{\beta^2}{2\alpha} & \frac{\beta^3}{\alpha}\left(\frac{1}{6} - \delta\right) \end{bmatrix}_i + \mathfrak{E}_i. \tag{31}$$

Die Abschnittsmatrix für einen Balken mit beliebiger Massen- und Steifigkeitsverteilung kann man näherungsweise bekommen, wenn man den Abschnitt in n Felder teilt und die n $\mathfrak{R}$- oder $\mathfrak{T}$-Matrizen nach (29) ausmultipliziert. In beiden Fällen muß man mit einer mittleren Steifigkeit rechnen[3]. Für die $\mathfrak{R}$-Matrix ist $\mu_i = m_i/l_i$, für die $\mathfrak{T}$-Matrix ist $m_{i'} = {}^1/_2 (m_i + m_{i+1})$ zu nehmen.

Die $\mathfrak{T}$-Matrix hat den Vorzug, daß sie einfacher gebaut ist als die $\mathfrak{R}$-Matrix, insbesondere läßt sich der Eigenwert ω^2 abspalten, (31), was für das numerische Rechnen sehr vorteilhaft ist. Lange homogene Abschnitte müssen aber in mehrere Felder unterteilt werden, wenn man ausreichende Genauigkeit erzielen will, während die $\mathfrak{R}$-Matrix beliebig lange homogene Abschnitte exakt erfaßt.

5. Randbedingungen, Eigenwertdeterminante. Gleichung (30) lautet für einen Balken mit den Rändern 1 und k ausführlich

$$\begin{bmatrix} w \\ \bar{\psi} \\ \overline{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ \bar{\psi} \\ \overline{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_1. \tag{32}$$

[1] *R. Zurmühl*, Matrizen, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.

[2] *W. T. Thomson*, J. appl. Mech. 17 (1950), S. 337, wo diese Matrix mit $\delta = 0$ und $\Theta = 0$ als Ausgangspunkt dient.

[3] Siehe z. B. *W. T. Thomson*, a. a. O., Area Moment Principle.

Von den je vier Komponenten der Vektoren $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_k$ lassen sich je zwei aus den Randbedingungen bestimmen. Bei den vier Lagerungsarten der Abb. 6 sind je zwei Komponenten Null.

Setzt man die jeweils geltenden Randbedingungen in (32) ein, so kann man diejenigen zwei homogenen linearen Gleichungen herausziehen, für welche die linke Seite Null ist. So ergibt sich z. B. für den links eingespannten, rechts gelenkig gelagerten Balken

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{M}_k \\ \overline{Q}_k \end{bmatrix} = [\mathfrak{A}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{\varphi}_1 \\ 0 \\ \overline{Q}_1 \end{bmatrix} ;$$

$$\rightarrow 0 = \begin{bmatrix} A_{12} & A_{14} \\ A_{22} & A_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\varphi}_1 \\ \overline{Q}_1 \end{bmatrix} . \quad (33)$$

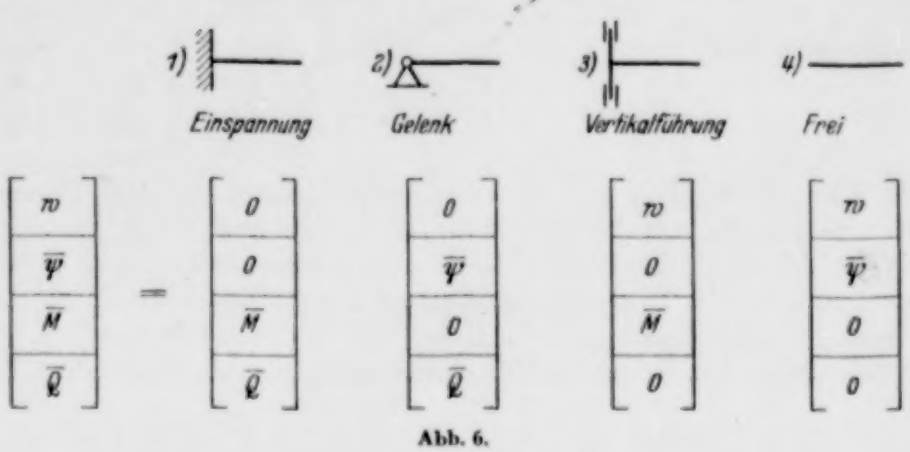

Abb. 6.

Das Gleichungssystem (33) hat nur dann eine Lösung für $\overline{\varphi}_1$ und $\overline{Q}_1$, d. h. der Balken führt nur dann freie Schwingungen aus, wenn seine Determinante verschwindet. Die Frequenzgleichung lautet also

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{14} \\ A_{22} & A_{24} \end{vmatrix} = 0 . \quad (34)$$

Ist $\mathfrak{A}$ noch geschlossen darstellbar, so kann hieraus die Eigenfrequenz bestimmt werden. Ist z. B. für den homogenen Balken $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$, so wird im Beispiel (33)

$$\begin{vmatrix} S & s \\ C & c \end{vmatrix} = S c - C s = 0 , \qquad \text{oder mit (4)} \qquad \operatorname{tg} \lambda = \mathfrak{Tg}\, \lambda .^{1} \quad (35)$$

Ist eine geschlossene Lösung nicht mehr möglich, so muß die Determinante Δ für verschiedene Frequenzen ω (in der Umgebung der zu erwartenden Eigenfrequenzen) berechnet werden. Die Nulldurchgänge der Kurve $\Delta = \Delta(\omega)$ oder $\Delta = \Delta(\lambda)$ ergeben dann die gesuchten Eigenfrequenzen.[2]

6. Determinanten-Matrix. In der Frequenzgleichung (34) tritt eine Determinante zweiten Grades aus Elementen der Matrix $\mathfrak{A}$ als Eigenwert-Determinante auf. Nun besteht ein Balken oder Balkenabschnitt im allgemeinen aus mehreren (in sich homogenen) Feldern. Die Feldmatrizen sind nach (29) auszumultiplizieren, und aus vier Elementen der Produktmatrix soll eine Determinante zweiten Grades gebildet werden. Führen wir diese Aufgabe für zwei Matrizen in allgemeinen Zeichen durch, d. h. bilden wir die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{ac} & C_{ad} \\ C_{bc} & C_{bd} \end{vmatrix} \quad (36a)$$

aus der Produkt-Matrix $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}$, so wird

$$\Delta = \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} B_{ai} A_{ic} B_{bk} A_{kd} - B_{bi} A_{ic} B_{ak} A_{kd} . \quad (36b)$$

Von den 32 Gliedern dieser Doppelsumme heben sich die 8 Glieder mit $i = k$ weg. Unter der Summe können wir $A_{ic} A_{kd}$ heraussetzen, der Rest läßt sich zu der Determinante $\begin{vmatrix} B_{ai} & B_{ak} \\ B_{bi} & B_{bk} \end{vmatrix}$ zusammenfassen. Unterscheiden wir nun bei der Summation zwischen $i < k$ und $i > k$, so können wir für (36 b) weiter schreiben

$$\Delta = \sum_{\substack{i=1 \\ i<k}}^{3} \sum_{k=2}^{4} \begin{vmatrix} B_{ai} & B_{ak} \\ B_{bi} & B_{bk} \end{vmatrix} A_{ic} A_{kd} + \sum_{\substack{i=2 \\ i>k}}^{4} \sum_{k=1}^{3} \begin{vmatrix} B_{ai} & B_{ak} \\ B_{bi} & B_{bk} \end{vmatrix} A_{ic} A_{kd} ; \quad (36c)$$

---

[1] S. *Timoshenko*, a. a. O., S. 345.

[2] „*Holzer*'sches Verfahren" in der Theorie der Torsionsschwingungen. Die Übertragung dieser Gedanken auf das Biegeproblem mit Hilfe der Matrizenschreibweise hat neuerdings auch *E. Pestel* gegeben. (Abh. d. Braunschw. Wiss. Ges., 1954, S. 227.)

vertauschen wir im zweiten Glied i und k, sowie die beiden Spalten der Determinante, so können wir beide Glieder wieder zusammenfassen und erhalten[1]

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{k=2 \\ i<k}}^{4} \begin{vmatrix} B_{ai} & B_{ak} \\ B_{bi} & B_{bk} \end{vmatrix} (A_{ic} A_{kd} - A_{kc} A_{id}) , \tag{36d}$$

oder mit (36 a)

$$\begin{vmatrix} C_{ac} & C_{ad} \\ C_{bc} & C_{bd} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{k=2 \\ i<k}}^{4} \begin{vmatrix} B_{ai} & B_{ak} \\ B_{bi} & B_{bk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{ic} & A_{id} \\ A_{kc} & A_{kd} \end{vmatrix} . \tag{37}$$

Um mit den hier auftretenden Determinanten zweiten Grades bequem und übersichtlich rechnen zu können, müssen wir sie durch ein kurzes Symbol kennzeichnen. Wir brauchen hierzu außer dem Zeichen für die Matrix der die Determinante entnommen ist, vier Indices, zwei für die Zeilen und zwei für die Spalten. So könnten wir für die auf der linken Seite der Gleichung (37) stehende Determinante etwa $C_{a\,b}^{c\,d}$ schreiben. Wir können mit weniger Indices auskommen, wenn wir die Reihenfolge der Zeilen- und Spaltenkombinationen durch ein Schema festlegen, etwa das folgende:

Zeilen oder Spalten	a, b / c, d	1,2	1,3	1,4	2,3	2,4	3,4
Kombinationsindex	p / q	1	2	3	4	5	6

. (38)

Hiernach bezeichnet das Symbol $C_{p\,q}^{\Delta}$ diejenige Determinante, deren Elemente nach dem Schema (38) durch die p-te Kombination zweier Zeilen und die q-te Kombination zweier Spalten gefunden werden. So ist z. B.:

$$C_{3\,5}^{\Delta} = \begin{vmatrix} C_{12} & C_{14} \\ C_{42} & C_{44} \end{vmatrix} . \tag{38a}$$

Wir wollen uns im folgenden dieser Schreibweise bedienen, nicht nur weil sie kürzer ist, sondern weil wir dann den Matrizenkalkül auf diese Determinanten übertragen können. Es sei aber als Nachteil vermerkt, daß zwischen den Kombinations-Zeichen p, q und den Indices der Determinanten-Elemente a, b, c, d kein formal zwingender Zusammenhang besteht. Der Zusammenhang ist vielmehr durch das bis zu einem gewissen Grad willkürliche lexikalische Schema (38) gegeben.

Mit der Verabredung (38) können wir nun jede der in (37) auftretenden Determinanten durch ein Symbol entsprechend (38a) darstellen. Außerdem wird dann aus der in (37) stehenden Doppelsumme über i, k eine einfache Summe; denn in (37) wird für die Kombinationen i, k in den zwei Zeilen a und b der Matrix $\mathfrak{B}$ die gleiche Reihenfolge vorgeschrieben wie in den zwei Spalten c und d der Matrix $\mathfrak{A}$. So können wir für (37) schreiben

$$C_{p\,q}^{\Delta} = \sum_{j=1}^{6} B_{p\,j}^{\Delta} A_{j\,q}^{\Delta} . \tag{39}$$

Diese Formel, die genauso gebaut ist wie die Produktdefinition der Matrizen, legt es nahe aus den nach (38) definierten Determinanten $C_{p\,q}^{\Delta}$ eine neue Matrix mit 6 mal 6 Elementen zu bilden, die wir als die erste Determinanten-Matrix der Matrix $\mathfrak{C}$ oder kurz als Δ-Matrix $\mathfrak{C}^{\Delta}$ bezeichnen. Aus (39) folgt dann die Matrizengleichung

$$\mathfrak{C}^{\Delta} = \mathfrak{B}^{\Delta} \cdot \mathfrak{A}^{\Delta} \qquad \text{oder} \qquad (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A})^{\Delta} = \mathfrak{B}^{\Delta} \cdot \mathfrak{A}^{\Delta} , \tag{40}$$

in Worten: Die Δ-Matrix eines Matrizen-Produktes ist gleich dem Produkt der Δ-Matrizen.[2]

Bei der Determinanten-Auswertung (36 b) zeigte sich, daß ein Viertel der auftretenden Glieder sich gegenseitig wegheben. Nun können gerade diese Glieder sehr groß werden gegen die übrigbleibenden. Das würde zur Folge haben, daß bei der Zahlenrechnung das Resultat als Differenz von zwei nahezu gleichen Zahlen sehr unsicher wird, und daß ein Grenzübergang zu dem unbestimmten Ergebnis $\infty - \infty$ führt, wenn man nicht die betreffende Größe, mit der man zur Grenze übergehen will (z. B. die Steifigkeit c eines elastischen Lagers), als Parameter bis zum Schluß mitnimmt.

[1] Vgl. *W. Schnell*, a. a. O.

[2] In den technischen Anweisungen ist diese Matrizenformel bisher wohl noch nicht bekannt gewesen. In der Algebra wird sie im Zusammenhang mit dem *Laplace*'schen Entwicklungsgesetz einer Determinante nach Unterdeterminanten bewiesen; z. B. *H. Hasse*, Aufgabensammlung zur Höh. Algebra, Göschen 1082, S. 57 (1952).

Der durch die Beziehung (37) oder (40) gegebene Zusammenhang gestattet uns nun, den letzten Schritt zur Ermittlung der Eigenwert-Determinanten Δ: den Übergang zur Determinanten, beliebig weit vorzuverlegen, gegebenenfalls bis zu den einzelnen Feldmatrizen. Damit kann nicht nur ein Teil des Rechenaufwands gespart werden, sondern es läßt sich vor allem auch die numerische Unsicherheit des Ergebnisses beseitigen und ein Grenzübergang (z. B. $c \to \infty$) schon in den Feldmatrizen durchführen.

Die Δ-Matrix $\mathfrak{C}^{\Delta}$ enthält sämtliche möglichen Determinanten zweiten Grades der Matrix $\mathfrak{C}$. Ihre Elemente C^{Δ}_{ik} sind also die Eigenwert-Determinanten eines durch $\mathfrak{C}$ erfaßten, aus beliebig vielen Feldern bestehenden Balkens bei allen möglichen Kombinationen der rechten und linken Randbedingungen. Für jede Spalte gelten zwei bestimmte rechte, für jede Zeile zwei bestimmte linke Randbedingungen (Abb. 7).

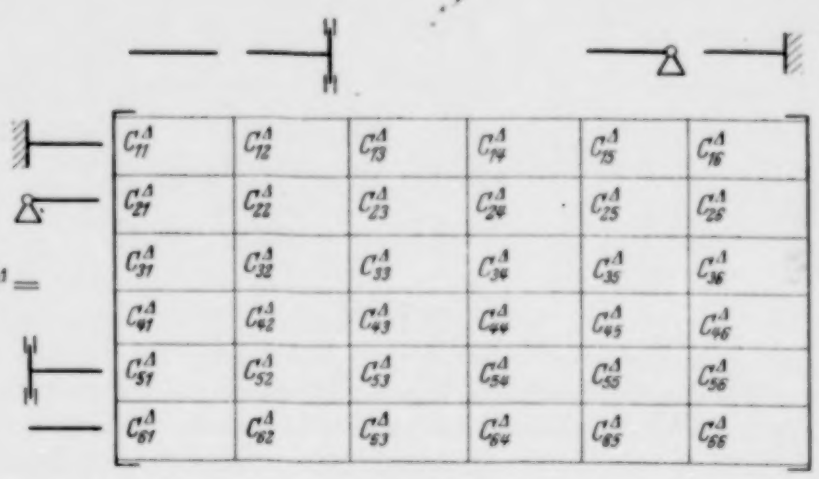

Abb. 7.

Die dritte und vierte Spalte oder Zeile würde für $w = 0, Q = 0$ und $\psi = 0, M = 0$ gelten, was mechanisch nicht denkbar ist. Die Frequenzgleichung für den links eingespannten, rechts gelenkig gelagerten Balken heißt hiernach z. B. $C^{\Delta}_{15} = 0$.

7. Δ-Matrix der *Rayleigh*-Matrix. Wir wollen aus der *Rayleigh*-Matrix $\mathfrak{R}$ (8) die zugeordnete Δ-Matrix $\mathfrak{R}^{\Delta}$ entsprechend der Verabredung (38) gewinnen. Dabei treten durch Determinantenbildung Kombinationen der Funktionen (4) auf, die sich durch die vier neuen Funktionen

$$\left.\begin{aligned}
B^* &= \frac{1}{2\lambda^3}(\mathfrak{Cof}\,\lambda \sin\lambda - \mathfrak{Sin}\,\lambda \cos\lambda) &&= \frac{1}{3} - \frac{2^3}{7!}\lambda^4 + \frac{2^5}{11!}\lambda^8 - \cdots \\
S^* &= \frac{1}{2\lambda^2}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda \sin\lambda &&= \frac{1}{2} - \frac{2^2}{6!}\lambda^4 + \frac{2^4}{10!}\lambda^8 - \frac{2^6}{14!}\lambda^{12} + \cdots \\
A^* &= \frac{1}{2\lambda}(\mathfrak{Cof}\,\lambda \sin\lambda + \mathfrak{Sin}\,\lambda \cos\lambda) &&= 1 - \frac{2^2}{5!}\lambda^4 + \frac{2^4}{9!}\lambda^8 - \frac{2^6}{13!}\lambda^{12} + \cdots \\
E^* &= \frac{1}{2}(1 + \mathfrak{Cof}\,\lambda \cos\lambda) &&= 1 - \frac{2}{4!}\lambda^4 + \frac{2^3}{8!}\lambda^8 - \frac{2^5}{12!}\lambda^{12} + \cdots
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

darstellen lassen[1]. Auch diese Funktionen können in gut konvergierende Reihen entwickelt werden. Die der Feld-Matrix $\mathfrak{R}$ zugeordnete Δ-Matrix lautet damit

$$\mathfrak{R}^{\Delta} = \begin{bmatrix}
E^* & \frac{\beta}{\alpha}A^* & \frac{\beta^2}{\alpha}S^* & \frac{\beta^2}{\alpha}S^* & \frac{\beta^3}{\alpha}B^* & \frac{\beta^4}{\alpha^2}(1-E^*) \\
-\lambda_0^4\frac{\alpha}{\beta}B^* & 2E^*-1 & \beta A^* & \beta A^* & 2\beta^2 S^* & \frac{\beta^3}{\alpha}B^* \\
-\lambda_0^4\frac{\alpha}{\beta^2}S^* & -\frac{\lambda_0^4}{\beta}B^* & E^* & E^*-1 & \beta A^* & \frac{\beta^2}{\alpha}S^* \\
-\lambda_0^4\frac{\alpha}{\beta^2}S^* & \frac{\lambda_0^4}{\beta}B^* & E^*-1 & E^* & \beta A^* & \frac{\beta^2}{\alpha}S^* \\
-\lambda_0^4\frac{\alpha}{\beta^3}A^* & -2\frac{\lambda_0^4}{\beta^2}S^* & -\frac{\lambda_0^4}{\beta}B^* & -\frac{\lambda_0^4}{\beta}B^* & 2E^*-1 & \frac{\beta}{\alpha}A^* \\
\lambda_0^8\frac{\alpha^2}{\beta^4}(1-E^*) & -\lambda_0^4\frac{\alpha}{\beta^3}A^* & -\lambda_0^4\frac{\alpha}{\beta^2}S^* & -\lambda_0^4\frac{\alpha}{\beta^2}S^* & -\lambda_0^4\frac{\alpha}{\beta}B^* & E^*
\end{bmatrix} \quad (42)$$

[1] Diese Funktionen sind im wesentlichen die bei *W. Prager* und *K. Hohenemser*, a. a. O., S. 323 tabulierten Funktionen.

$\mathfrak{R}^{\Delta}$ ist wie $\mathfrak{R}$ symmetrisch zur Nebendiagonalen. Entsprechend Abb. 7 sind die Elemente R^{Δ}_{ik} die Eigenwert-Determinanten für den homogenen Balken bei allen möglichen Kombinationen der rechten und linken Randbedingungen[1]. Die Lösung für den beidseitig eingespannten Balken heißt hiernach z. B.

$$1 - E^{*} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Cof}\,\lambda \cos\lambda = 1 .$$

Ferner ist zu erkennen, daß die in Abb. 8 zusammengestellten vier Paare je die gleichen Eigenfrequenzen haben.

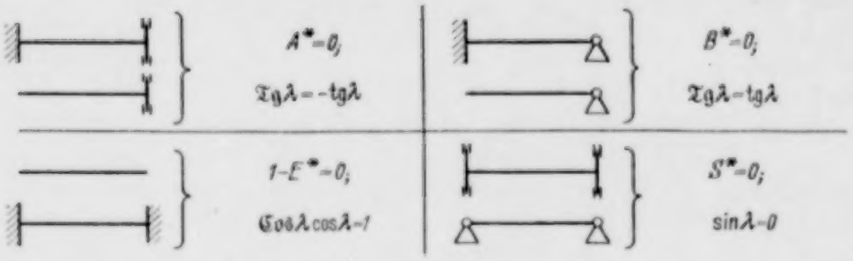

Abb. 8.

Wie für die Matrix $\mathfrak{R}$ können wir auch für die in Ziff. 3 gefundene Matrix $\mathfrak{U}$ (25), bei der Rotationsträgheit und Schubelastizität mit berücksichtigt sind, die zugeordnete Δ-Matrix finden. Die hierzu aus (24) durch Determinantenbilden abzuleitenden Funktionen sind jedoch naturgemäß komplizierter[2] als die entsprechenden Funktionen (41) für die Matrix $\mathfrak{R}^{\Delta}$. Es seien hier nur die beiden Sonderfälle $\mathfrak{E}^{\Delta}$ und $\mathfrak{M}^{\Delta}$ angeführt, die sich auch aus $\mathfrak{E}$ (27) und $\mathfrak{M}$ (28) unmittelbar ergeben:

$$\mathfrak{E}^{\Delta}_{i} = \begin{bmatrix} 1 & \beta/\alpha & \beta^2/2\,\alpha & \beta^2/2\,\alpha & \beta^3/\alpha\,(\tfrac{1}{3}+\delta) & \beta^4/\alpha^2\,(\tfrac{1}{12}+\delta) \\ 0 & 1 & \beta & \beta & \beta^2 & \beta^3/\alpha\,(\tfrac{1}{3}+\delta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta & \beta^2/2\,\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta & \beta^2/2\,\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \beta/\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{i} , \tag{43}$$

$$\mathfrak{M}^{\Delta}_{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Theta_i \omega^2 \dfrac{\bar{l}}{EI} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -m_i \omega^2 \dfrac{\bar{l}^3}{EI} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{m_i \Theta_i \omega^4 \bar{l}^4}{(EI)^2} & -m_i \omega^2 \dfrac{\bar{l}^3}{EI} & 0 & 0 & -\Theta_i \omega^2 \dfrac{\bar{l}}{EI} & 1 \end{bmatrix} . \tag{44}$$

8. Elastische Stütze. Eine elastische Stütze kann durch eine Stützen-Matrix $\mathfrak{S}$ erfaßt werden, die zwischen den Vektoren $\mathfrak{y}_i$ und $\mathfrak{y}_{i+1}$ vor und hinter der Stütze vermittelt:

$$\mathfrak{y}_{i+1} = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{y}_i . \tag{45a}$$

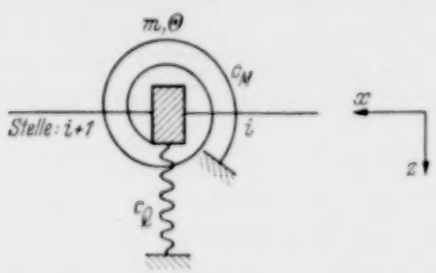

Abb. 9.

Die Stütze habe eine Quer-Federkonstante c_Q und eine Dreh-Federkonstante c_M. Das zwischen den Stellen i und $i+1$ liegende Balkenfeld i habe außerdem die Einzelmasse m mit der Drehmasse Θ, jedoch keine Länge: $l \to 0$ (Abb. 9). Es ist dann

$$w_{i+1} = w_i , \qquad \psi_{i+1} = \psi_i , \tag{45b}$$

und es gelten die Bewegungsgleichungen

$$m\,\ddot{w}_i = Q_{i+1} - Q_i - c_Q\,w_i , \quad \Theta\,\ddot{\psi}_i = M_i - M_{i+1} - c_M\,\psi_i , \tag{45c}$$

oder für harmonische Schwingungen

$$-M_{i+1} = (c_M - \Theta\,\omega^2)\,\psi_i - M_i , \qquad -Q_{i+1} = (m\,\omega^2 - c_Q)\,w_i - Q_i . \tag{45d}$$

Schreiben wir zur Abkürzung

$$\frac{\bar{l}}{EI}\,(c_M - \Theta\,\omega^2) = \Gamma_M , \qquad \frac{\bar{l}^3}{EI}\,(c_Q - m\,\omega^2) = \Gamma_Q , \tag{46}$$

[1] $R^{\Delta}_{13} = R^{\Delta}_{14}$ usw. sind mechanisch die Folge des *Maxwell*schen Vertauschungssatzes, siehe Diss. *W. Schnell.*

[2] Siehe Diss. des Verfassers.

so lassen sich die Aussagen (45b) und (45d) in Form der Vektorgleichung (45a) schreiben mit

$$\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_M & 1 & 0 \\ -\Gamma_Q & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Die Δ-Matrix der Matrix $\mathfrak{S}$ wird dann

$$\mathfrak{S}^{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_M & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Gamma_Q & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Gamma_M \Gamma_Q & \Gamma_Q & 0 & 0 & \Gamma_M & 1 \end{bmatrix}. \tag{48}$$

Mit $c_M \to 0$ und $c_Q \to 0$ wird aus (47) die Massenmatrix $\mathfrak{M}$ (28) aus (48) $\mathfrak{M}^{\Delta}$ (44).

Ist ein Balkenfeld i von der Länge l_i elastisch gebettet mit der über l_i konstanten Bettungsziffer k_i, so daß die örtliche Federkraft $dK = -w\,k\,dx$ ist, so gilt die Bewegungsgleichung $\mu \ddot{w} = Q' - k\,w$ oder für harmonische Schwingungen $(k - \omega^2 \mu)\,w = Q'$. Damit gilt auch hier die Differentialgleichung (1) und die Matrix $\mathfrak{R}$ (8), jedoch mit

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2 \mu - k}{EI} l^4. \tag{49}$$

Mit Hilfe der Matrizen $\mathfrak{S}$ oder $\mathfrak{S}^{\Delta}$ läßt sich ein Balken mit beliebig vielen elastischen Lagern in sehr einfacher und übersichtlicher Weise erfassen. Wir wollen das am Beispiel eines Balkens mit drei elastischen Stützen zeigen.

Die Abschnittsmatrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ für die Abschnitte 2 und 4 zwischen den Stützen seien aus beliebig vielen Feldmatrizen durch Matrizen-Multiplikation (29) gewonnen. Dann gilt wieder nach (29) für den ganzen Balken mit den Randbedingungen Abb. 6, Fall 4, wobei die Stützen mit 1, 3, 5 bezeichnet seien,

$$\begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_6 = \mathfrak{S}_5 \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{S}_3 \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{S}_1 \cdot \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_1 = \mathfrak{C} \cdot \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_1, \tag{50}$$

wobei $\mathfrak{C}$ durch Ausmultiplizieren der fünf Matrizen gewonnen wird. Die Eigenwertgleichung heißt dann entsprechend (34)

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{31} & C_{32} \\ C_{41} & C_{42} \end{vmatrix} = 0. \tag{51}$$

Führen wir diese Rechnung in allgemeinen Zeichen durch, wobei wir $\Gamma_M = 0$ annehmen und für Γ_Q kurz Γ schreiben wollen, so wird unter Verwendung der Verabredung (38)

$$\begin{aligned}
\Delta = \Bigg| \quad & \sum_1^4 A_{i1} B_{3i} && \sum_1^4 A_{i2} B_{3i} \\
& -\sum_1^4 A_{i4} B_{3i} \cdot \Gamma_1 \\
& -A_{11} B_{34} \cdot \Gamma_3 && -A_{12} B_{34} \cdot \Gamma_3 \\
& +A_{14} B_{34} \cdot \Gamma_1 \Gamma_3 \\
& \text{---------------} && \text{---------------} \\
& \sum_1^4 A_{i1} B_{4i} && \sum_1^4 A_{i2} B_{4i} \\
& -\sum_1^4 A_{i4} B_{4i} \cdot \Gamma_1 \\
& -A_{11} B_{44} \cdot \Gamma_3 && -A_{12} B_{44} \cdot \Gamma_3 \\
& -\sum_1^4 A_{i1} B_{1i} \cdot \Gamma_5 && -\sum_1^4 A_{i2} B_{1i} \Gamma_5 \\
& +A_{14} B_{44} \cdot \Gamma_1 \Gamma_3 \\
& +\sum_1^4 A_{i4} B_{1i} \cdot \Gamma_1 \Gamma_5 \\
& +A_{11} B_{14} \cdot \Gamma_3 \Gamma_5 && +A_{12} B_{14} \cdot \Gamma_3 \Gamma_5 \\
& -A_{14} B_{14} \cdot \Gamma_1 \Gamma_3 \Gamma_5
\end{aligned} \Bigg| = \begin{aligned}
& \sum_1^6 A^{\Delta}_{i1} B^{\Delta}_{6i} \\
& + \sum_1^6 A^{\Delta}_{i5} B^{\Delta}_{6i} \cdot \Gamma_1 \\
& + (A^{\Delta}_{11} B^{\Delta}_{65} + A^{\Delta}_{21} B^{\Delta}_{66}) \cdot \Gamma_3 \\
& + \sum_1^6 A^{\Delta}_{i1} B^{\Delta}_{2i} \cdot \Gamma_5 \\
& + (A^{\Delta}_{15} B^{\Delta}_{65} + A^{\Delta}_{25} B^{\Delta}_{66}) \cdot \Gamma_1 \Gamma_3 \\
& + \sum_1^6 A^{\Delta}_{i5} B^{\Delta}_{2i} \cdot \Gamma_1 \Gamma_5 \\
& + (A^{\Delta}_{11} B^{\Delta}_{25} + A^{\Delta}_{21} B^{\Delta}_{26}) \cdot \Gamma_3 \Gamma_5 \\
& + 0 \cdot \Gamma_3^2 \\
& + (A^{\Delta}_{15} B^{\Delta}_{25} + A^{\Delta}_{25} B^{\Delta}_{26}) \cdot \Gamma_1 \Gamma_3 \Gamma_5 \\
& + 0 \cdot \Gamma_1 \Gamma_3^2 \\
& + 0 \cdot \Gamma_3^2 \Gamma_5 \\
& + 0 \cdot \Gamma_1 \Gamma_3^2 \Gamma_5 \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{52}$$

Hier zeigt sich deutlich das in Ziff. 5 Gesagte: Bei der Zusammenfassung verschwinden 4 von den 12 Gliedern, darunter gerade das Glied mit der höchsten Γ_i-Potenz. Dies hat die sehr unangenehme Folge, daß, wenn wir mit Zahlen rechnen, d. h. nicht mehr nach Γ-Potenzen ordnen können, die Rechnung insbesondere bei großen Werten von Γ_i sehr unsicher wird, und daß der wichtige Fall starrer Lager, also $\Gamma_i \to \infty$ mit diesem Verfahren nicht erfaßt werden kann, wenn wir nicht $\Gamma_i = \Gamma$ als Parameter bis zum Schluß mitnehmen.

Die Lösung für den Sonderfall starrer Lager liefert der Faktor mit der höchsten verbleibenden Γ-Potenz. Hier also

$$A^A_{15}\, B^A_{25} + A^A_{25}\, B^A_{26} = 0\,. \tag{53}$$

Wenn wir an Stelle der in (50) verwendeten Matrizen gleich die zugeordneten A-Matrizen, entsprechend (38) benützen, so können wir nach (40)

$$\mathfrak{S}^A_5 \cdot \mathfrak{B}^A \cdot \mathfrak{S}^A_3 \cdot \mathfrak{A}^A \cdot \mathfrak{S}^A_1 = \mathfrak{C}^A \tag{54}$$

bilden, und die Eigenwertgleichung ist dann entsprechend Abb. 7

$$C^A_{61} = 0\,. \tag{55}$$

Für die Rechnung brauchen hier die Matrizen nicht voll besetzt zu sein. Wir nehmen nur die notwendigen Elemente mit (bei der Gewinnung von $\mathfrak{A}^A$ aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}^A$ aus $\mathfrak{B}$ können wir uns ebenfalls darauf beschränken) und erhalten für (54) ausführlich

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \Gamma_5 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B^A_{21} & B^A_{22} & B^A_{23} & B^A_{24} & B^A_{25} & B^A_{26} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B^A_{61} & B^A_{62} & B^A_{63} & B^A_{64} & B^A_{65} & B^A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \Gamma_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \Gamma_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^A_{11} & \cdot & \cdot & A^A_{15} & \cdot \\ A^A_{21} & \cdot & \cdot & A^A_{25} & \cdot \\ A^A_{31} & \cdot & \cdot & A^A_{35} & \cdot \\ A^A_{41} & \cdot & \cdot & A^A_{45} & \cdot \\ A^A_{51} & \cdot & \cdot & A^A_{55} & \cdot \\ A^A_{61} & \cdot & \cdot & A^A_{65} & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Gamma_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \mathfrak{C}^A\,. \tag{56}$$

Für (56) kommt durch Ausmultiplizieren der Matrizen unmittelbar

$$\left.\begin{aligned} C^A_{61} = \quad & \sum_1^6 B^A_{6i}\, A^A_{i1} && + (B^A_{65}\, A^A_{11} + B^A_{66}\, A^A_{21}) \cdot \Gamma_3 \\ & + \sum_1^6 B^A_{2i}\, A^A_{i1} \cdot \Gamma_5 && + (B^A_{25}\, A^A_{11} + B^A_{26}\, A^A_{21}) \cdot \Gamma_3\, \Gamma_5 \\ & + \sum_1^6 B^A_{6i}\, A^A_{i5} \cdot \Gamma_1 && + (B^A_{65}\, A^A_{15} + B^A_{66}\, A^A_{25}) \cdot \Gamma_1\, \Gamma_3 \\ & + \sum_1^6 B^A_{2i}\, A^A_{i5} \cdot \Gamma_1\, \Gamma_5 && + (B^A_{25}\, A^A_{15} + B^A_{26}\, A^A_{25}) \cdot \Gamma_1\, \Gamma_3\, \Gamma_5 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Im Gegensatz zu (52) treten jetzt die höheren Γ-Potenzen, deren Koeffizienten dort verschwanden, gar nicht mehr auf. Der Balken mit starren Stützen kann jetzt sehr bequem als Sonderfall erfaßt werden: Eine starre Stütze an der Stelle i bedeutet $\Gamma_i \to \infty$; in der Frequenzgleichung sind dann alle Γ_i-freien Glieder klein gegen die Glieder mit Γ_i und können unterdrückt werden, während die Summe der mit Γ_i behafteten Glieder (Γ_i selbst ausgeklammert) für sich Null werden muß, wenn ω ein Eigenwert sein soll. Das bedeutet, daß die A-Matrix $\mathfrak{S}^A$ (49) degeneriert zu der A-Matrix für die starre Stütze

$$\mathfrak{S}^A_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Nehmen wir etwa im Beispiel oben in der Mitte ein starres Lager an, während die Außenlager elastisch bleiben mögen, so ist in (56) die mittlere Matrix durch $\mathfrak{S}^A_s$ zu ersetzen. Von (57) bleibt dann nur der rechte Teil mit $\Gamma_3 = 1$ übrig.

Sind alle drei Stützen starr, so wird aus (56)

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_{25}^{\Delta} & B_{26}^{\Delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{15}^{\Delta} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{25}^{\Delta} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \mathfrak{C}^{\Delta} \qquad (59)$$

und $\Delta = C_{61}^{\Delta} = B_{25}^{\Delta} A_{15}^{\Delta} + B_{26}^{\Delta} A_{25}^{\Delta} = 0$, wie nach (57) mit $\Gamma_1 = \Gamma_3 = \Gamma_5 \to \infty$.

9. Eigenschwingungsformen. Das homogene, lineare Gleichungssystem, das zur Eigenwertgleichung führt, z. B. (33) hat $1 \cdot \infty$ viele Lösungen, wenn ω eine Eigenfrequenz ω_e ist. Man kann daher von n Unbekannten dieses Systems eine frei wählen (z. B. $= 1$ setzen) und hat dann noch $n - 1$ Gleichungen für die restlichen Unbekannten. Auf diese Weise lassen sich die Komponenten des Vektors $\mathfrak{y}_1$ am rechten Rand des Balkens finden. Im Falle (33) z. B. folgt aus $w_1 = 0$; $M_1 = 0$ und $\psi_1 = 1$, also $\overline{M}_1 = 0$ und $\overline{\varphi}_1 = \bar{l}$:

$$\overline{Q}_1 = -\frac{A_{22}}{A_{24}} \bar{l} = -\frac{A_{12}}{A_{14}} \bar{l} . \qquad (60)$$

Aus der Matrizengleichung (30) ergeben sich die Komponenten des Vektors $\mathfrak{y}_i$, insbesondere w_i, an beliebigen Stellen i, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\omega_e)$ die Matrix für das zwischen den Stellen 1 und i liegende Balkenstück ist. So erhalten wir z. B. für den links eingespannten, rechts gelenkig gelagerten homogenen Balken die Eigenfunktion aus (8) mit (60):

$$w(x) = A_{12}(x)\,\bar{l} - A_{14}(x)\,\frac{A_{22}(l)}{A_{24}(l)}\,\bar{l} = x\,S\left(\lambda\,\frac{x}{l}\right) - x^3\,s\left(\lambda\,\frac{x}{l}\right)\frac{C(\lambda)}{l^2\,c(\lambda)}$$

$$= \frac{l}{\lambda}\,\frac{\sin\lambda\,\dfrac{x}{l}\,\mathfrak{Cof}\,\lambda - \mathfrak{Sin}\,\lambda\,\dfrac{x}{l}\,\cos\lambda}{\mathfrak{Cof}\,\lambda - \cos\lambda}\,, \quad \text{mit} \quad \operatorname{tg}\lambda = \mathfrak{Tg}\,\lambda \quad \text{nach (35)}\,. \qquad (61)$$

Für den Balken mit elastischen Zwischenstützen gilt dasselbe, wenn man unter $\mathfrak{A}$ jetzt das (die Stützenmatrix enthaltende) Produkt aller Matrizen zwischen 1 und i versteht. Aber auch bei starren Zwischenstützen läßt sich die Eigenfunktion ohne Schwierigkeit bestimmen: Aus der Bedingung $w_b = 0$ (Abb. 10) kann die fehlende Komponente von $\mathfrak{y}_a$ (hier $\overline{Q}_a$) gewonnen werden. Es ist für $\psi_a = 1$

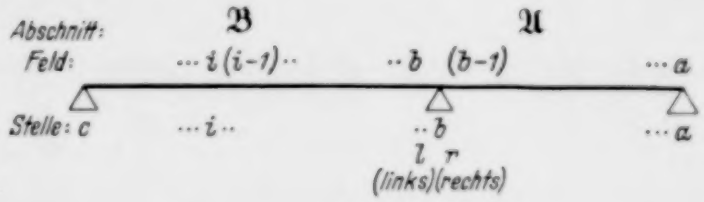

Abb. 10.

$$w_a = 0\,, \qquad \overline{\varphi}_a = \bar{l}\,, \qquad \overline{M}_a = 0\,, \qquad \overline{Q}_a = -\frac{A_{12}}{A_{14}}\,\bar{l}\,.$$

Aus $\mathfrak{y}_{br} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y}_a$ folgt

$$\left.\begin{aligned} w_b &= 0\,, \\ \overline{\varphi}_b &= A_{22}\,\bar{l} - A_{24}\,\frac{A_{12}}{A_{14}}\,\bar{l} = -\frac{A_{15}^{\Delta}}{A_{14}}\,\bar{l}\,, \\ \overline{M}_b &= A_{32}\,\bar{l} - A_{34}\,\frac{A_{12}}{A_{14}}\,\bar{l} = -\frac{A_{25}^{\Delta}}{A_{14}}\,\bar{l}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (62a)$$

$\overline{Q}_{br}$ wird hier nicht gebraucht. $\overline{Q}_{bl}$, die Querkraft links von der Stütze b, folgt aus der Bedingung $w_c = B_{12}\,\overline{\varphi}_b + B_{13}\,\overline{M}_b + B_{14}\,\overline{Q}_{bl} = 0$ zu

$$\overline{Q}_{bl} = \frac{A_{15}^{\Delta}\,B_{12} + A_{25}^{\Delta}\,B_{13}}{A_{14}\,B_{14}}\,\bar{l}\,. \qquad (62b)$$

Damit ist $\mathfrak{y}$ an jeder Zwischenstelle i bekannt, so ist z. B.

$$w_i = V_{12}\,\overline{\varphi}_b + V_{13}\,\overline{M}_b + \overline{V}_{14}\,Q_{bl}\,, \qquad (63)$$

wenn die Matrix $\mathfrak{V} = \mathfrak{B}_{i-1}\mathfrak{B}_{i-2} \ldots \mathfrak{B}_b$ ist.

Wenn ω keine Eigenfrequenz ist, werden die Randbedingungen und Übergangsbedingungen nicht sämtlich erfüllt sein. So ist im letzten Beispiel die Bedingung

$$\overline{M_e} = B_{32}\,\overline{\psi_b} + B_{33}\,\overline{M_b} + B_{34}\,\overline{Q_{bl}} = \frac{A^1_{15}\,B^1_{25} + A^1_{25}\,B^1_{26}}{A_{14}\,B_{14}}\,\overline{l} = 0 \tag{64}$$

noch offen. Sie ist nur für $\omega = \omega_e$ erfüllt und liefert daher die Eigenwertgleichung

$$\Delta(\omega) = A^1_{15}\,B^1_{25} + A^1_{25}\,B^1_{26} = 0\,, \tag{65}$$

die, wie es sein muß, mit (53) übereinstimmt.

$\overline{M_e}$ ist dasjenige Erregermoment, das eine Schwingung mit der Anfangsneigung $\psi_a = 1$ erzwingt. Es ist Null für $\omega = \omega_e$. Statt der Nulldurchgänge der Frequenzfunktion $\Delta(\omega)$ kann man also auch die Nulldurchgänge von $\overline{M_e}(\omega)$ zur Bestimmung von $\omega = \omega_e$ benützen.

10. Erzwungene Schwingungen. Wie Ziff. **9** zeigt, können wir, im Rahmen der hier behandelten Matrizenmethode, erzwungene Schwingungen dann auf sehr einfache Weise erfassen, wenn die erzwingende Ursache (Kraft oder Verrückung) an einem Rand auftritt. Die $(i-1)$-Felder eines Kragträgers z. B. seien zu einem Abschnitt mit der Matrix $\mathfrak{A}$ zusammengefaßt. Am freien Ende i greife eine mit der Frequenz Ω pulsierende Kraft an, deren Amplitude P_i ist. Die Randbedingungen lauten dann

$$\left.\begin{aligned} &\overline{M_i} = 0\,, && \overline{Q_i} = -\,P_i\,\frac{\overline{l}^3}{\overline{EI}} \equiv \overline{P}_i\,,\\ &w_1 = 0\,, && \overline{\psi_1} = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

und wir erhalten, wenn wir die letzten zwei Gleichungen von $\mathfrak{y}_i = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{y}_1$ verwenden

$$\overline{M_1} = -\,\overline{P}_i\,\frac{A_{34}}{A^1_{66}}\,, \qquad \overline{Q_1} = \overline{P}_i\,\frac{A_{33}}{A^1_{66}}\,. \tag{67}$$

Ferner ist z. B.

$$w_i = A_{13}\,\overline{M_1} + A_{14}\,\overline{Q_1} = -\,\overline{P}_i\,\frac{A^1_{26}}{A^1_{66}}\,. \tag{68}$$

Für den masselosen Kragträger mit Endmasse wird

$$w_i = P_i\,\frac{h}{1-\Omega^2\,m\,h} = w_{st}\cdot\frac{1}{1-\eta^2}\,, \tag{69}$$

wobei $h = l^3/3\,EI$ die Einflußzahl des Kragträgers, $w_{st} = P_i\,h$ die statische Durchsenkung und $\eta = \Omega/\omega_e$ mit $\omega_e = 1/\sqrt{m\,h}$ die Abstimmung ist[1].

Bei einem symmetrischen Tragwerk können wir den Schwingungsansatz auf eine Symmetriehälfte beschränken. Die Symmetriestellen werden dann Randstellen, so daß wir nach der eben beschriebenen Art auch Erregerkräfte erfassen können, die an einer Symmetriestelle angreifen.

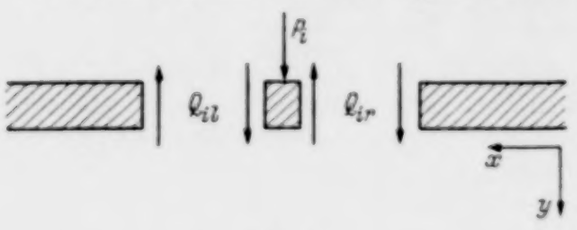

Abb. 11.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn die erregende Kraft (oder Verschiebung) nicht an einem Rand wirkt, sondern innerhalb eines Abschnitts. Greift an der Stelle i die Erregerkraft P_i an, so gilt für die Querkräfte unmittelbar links bzw. rechts von i die Gleichgewichtsbedingung (Abb. 11)

$$\overline{Q}_{il} = \overline{Q}_{ir} - \overline{P}_i\,, \tag{70a}$$

während $w_{il} = w_{ir}$, $\overline{\psi}_{il} = \overline{\psi}_{ir}$ und $\overline{M}_{il} = \overline{M}_{ir}$ bleibt. Wir können also schreiben

$$\mathfrak{y}_{il} = \mathfrak{y}_{ir} - \overline{P}_i \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}. \tag{70b}$$

[1] *K. Klotter*, Techn. Schwingungslehre Bd. 1, S. 65 u. 167, 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951.

Die Stelle i möge zwischen beliebig vielen, beliebig gearteten Feldern 1 bis $(k-1)$ liegen (Abb. 12). Die Feldmatrizen aller Felder rechts bzw. links von i seien zusammengefaßt zu den Abschnittsmatrizen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$. Dann gilt

$$\mathfrak{y}_k = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{y}_{il}\,, \qquad \mathfrak{y}_{ir} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y}_1\,. \tag{70c}$$

Die Verbindung zwischen diesen Gleichungen wird durch (70b) hergestellt, und wir erhalten durch Einsetzen

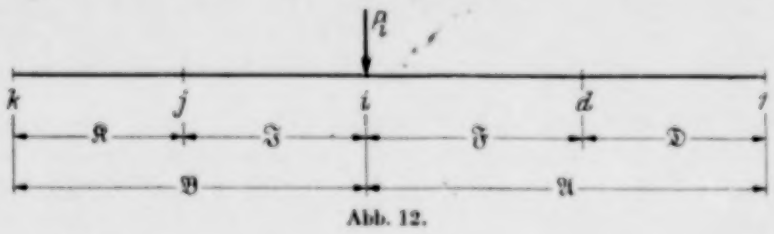

Abb. 12.

$$\mathfrak{y}_k = \mathfrak{B}\left(\mathfrak{A}\,\mathfrak{y}_1 - \overline{P}_i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{y}_1 - \overline{P}_i\,\mathfrak{b}_4\,, \tag{70d}$$

wobei $\mathfrak{b}_4$ der vierte Spaltenvektor der Matrix $\mathfrak{B}$ ist. Setzen wir

$$\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{C}\,, \tag{70e}$$

so können wir für (70d) schreiben

$$\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}_k + \overline{P}_i\,\mathfrak{b}_4\,. \tag{71}$$

Führen wir nun die Randbedingungen für die Ränder 1 und k ein, so wird aus (71) z. B. für beidseitig freie Enden

$$\mathfrak{C} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \overline{\varphi}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_k \\ \overline{\varphi}_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \overline{P}_i \cdot \begin{bmatrix} B_{14} \\ B_{24} \\ B_{34} \\ B_{44} \end{bmatrix}. \tag{72a}$$

Aus diesem Gleichungssystem greifen wir die zwei Gleichungen heraus, die das Verschwinden zweier Komponenten von $\mathfrak{y}_k$ ausdrücken

$$\left.\begin{aligned} C_{31}\,w_1 + C_{32}\,\overline{\varphi}_1 &= \overline{P}_i\,B_{34}\,, \\ C_{41}\,w_1 + C_{42}\,\overline{\varphi}_1 &= \overline{P}_i\,B_{44}\,. \end{aligned}\right\} \tag{72b}$$

Hieraus erhalten wir

$$w_1 = -\frac{\overline{P}_i}{C^4_{61}} \begin{vmatrix} C_{32} & B_{34} \\ C_{42} & B_{44} \end{vmatrix}\,, \qquad \overline{\varphi}_1 = \frac{\overline{P}_i}{C^4_{61}} \begin{vmatrix} C_{31} & B_{34} \\ C_{41} & B_{44} \end{vmatrix}\,. \tag{73}$$

Für die hierbei auftretenden Zählerdeterminanten, bei denen die erste Spalte aus Elementen der Matrix $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}$ besteht, können wir allgemein die folgende Entwicklungsregel aufstellen:

$$\begin{vmatrix} C_{ac} & B_{ad} \\ C_{bc} & B_{bd} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{vmatrix} B_{ai} & B_{ad} \\ B_{bi} & B_{bd} \end{vmatrix} \cdot A_{ic}\,. \tag{74}$$

Entwickeln wir nämlich die links stehende Determinante nach Elementen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so können wir die entstehenden 8 Glieder zu der rechtsstehenden Summe wieder zusammenfassen. Dabei tilgen sich 2 der 8 Glieder (von den rechts auftretenden Determinanten wird diejenige mit $i = d$ zu Null). Die restlichen 3 Determinanten sind nach Ziff. 6 Elemente der Matrix $\mathfrak{B}^4$. Die Beziehung zwischen den Indices $m\,n$ von $B^4_{m\,n}$ und den Indices a, b, i, d der zugehörigen Determinanten-Elemente läßt sich nicht unmittelbar formulieren; sie geht aus dem Schema (38) hervor.

Mit (74) erhalten wir für $\mathfrak{y}_1$ aus (73)

$$\mathfrak{y}_1 = \left\{\begin{aligned} w_1 &= -\frac{\overline{P}_i}{C^4_{61}}\,(B^4_{63}\,A_{12} + B^4_{65}\,A_{22} + B^4_{66}\,A_{32})\,, \\ \overline{\varphi}_1 &= \frac{\overline{P}_i}{C^4_{61}}\,(B^4_{63}\,A_{11} + B^4_{65}\,A_{21} + B^4_{66}\,A_{31})\,, \\ \overline{M}_1 &= 0\,, \\ \overline{Q}_1 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

An einer beliebigen Stelle d zwischen den Stellen 1 und i erhalten wir dann die Komponenten des Vektors $\mathfrak{y}_d$ mit Hilfe der zwischen 1 und d vermittelnden Matrix $\mathfrak{D}$ (Abb. 12) aus

$$\mathfrak{y}_d = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{y}_1\,. \tag{76a}$$

Setzen wir die Beziehungen (75) ein und fassen die Elemente aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ zu Determinanten zusammen, so wird

$$w_d = -\frac{\overline{P}_i}{C^{\Delta}_{61}}\left(B^{\Delta}_{63}\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ A_{11} & A_{12}\end{vmatrix} + B^{\Delta}_{65}\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix} + B^{\Delta}_{66}\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ A_{31} & A_{32}\end{vmatrix}\right) \tag{76b}$$

und entsprechend $\overline{\varphi}_d$, $\overline{M}_d$ und $\overline{Q}_d$.

Auch hier können wir für die jeweils im Zähler auftretenden Determinanten, bei denen die zweite Zeile aus Elementen der Matrix $\mathfrak{A} = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{D}$ besteht, eine allgemeine Entwicklungsregel aufstellen:

$$\begin{vmatrix} D_{ae} & D_{da} \\ A_{be} & A_{bd}\end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{4}\begin{vmatrix} D_{ae} & D_{ad} \\ D_{ie} & D_{id}\end{vmatrix} \cdot F_{bi}\,. \tag{77}$$

Wie bei der Regel (74) fallen auch hier von 8 Gliedern 2 weg, von den rechts stehenden Determinanten wird diejenige mit $i = a$ zu Null. Die restlichen 3 Determinanten sind Elemente der Matrix $\mathfrak{D}^{\Delta}$ (Ziff. 6). Hiermit können wir (76b) auf die folgende Form bringen:

$$w_d = -\frac{\overline{P}_i}{C^{\Delta}_{61}}\begin{bmatrix} B^{\Delta}_{63}(D^{\Delta}_{11}F_{12} + D^{\Delta}_{21}F_{13} + D^{\Delta}_{31}F_{14}) \\ + B^{\Delta}_{65}(D^{\Delta}_{11}F_{22} + D^{\Delta}_{21}F_{23} + D^{\Delta}_{31}F_{24}) \\ + B^{\Delta}_{66}(D^{\Delta}_{11}F_{32} + D^{\Delta}_{21}F_{33} + D^{\Delta}_{31}F_{34})\end{bmatrix} \tag{78}$$

und entsprechend $\overline{\varphi}_d$, $\overline{M}_d$ und $\overline{Q}_d$.

Für $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$ (Einheitsmatrix) erhalten wir hieraus den Vektor $\mathfrak{y}_{ir}$ unmittelbar rechts von der Erregerstelle i

$$\mathfrak{y}_{ir} = \left\{\begin{array}{ll} w_i = & -\dfrac{\overline{P}_i}{C^{\Delta}_{61}}(B^{\Delta}_{65}A^{\Delta}_{11} + B^{\Delta}_{66}A^{\Delta}_{21})\,, \\ \overline{\varphi}_i = & \dfrac{\overline{P}_i}{C^{\Delta}_{61}}(B^{\Delta}_{63}A^{\Delta}_{11} - B^{\Delta}_{66}A^{\Delta}_{41})\,, \\ \overline{M}_i = & \dfrac{\overline{P}_i}{C^{\Delta}_{61}}(B^{\Delta}_{63}A^{\Delta}_{21} + B^{\Delta}_{65}A^{\Delta}_{41})\,, \\ \overline{Q}_{ir} = & \dfrac{\overline{P}_i}{C^{\Delta}_{61}}(B^{\Delta}_{63}A^{\Delta}_{31} + B^{\Delta}_{65}A^{\Delta}_{51} + B^{\Delta}_{66}A^{\Delta}_{61})\,. \end{array}\right\} \tag{79}$$

Der Vektor $\mathfrak{y}_{il}$ unmittelbar links von der Erregerstelle i, unterscheidet sich von $\mathfrak{y}_{ir}$ nur durch den Querkraftsprung, der in den Gleichungen (70a) und (70b) zum Ausdruck kommt. Für eine Stelle j zwischen i und k erhalten wir, wenn die Matrix $\mathfrak{J}$ den Abschnitt zwischen i und j erfaßt (Abb. 12), mit (70b)

$$\mathfrak{y}_j = \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{y}_{il} = \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{y}_{ir} - \overline{P}_i\begin{bmatrix} I_{14} \\ I_{24} \\ I_{34} \\ I_{44}\end{bmatrix}\,. \tag{80}$$

Setzen wir $\mathfrak{y}_{ir}$ aus (79) in diese Gleichung ein, so erhalten wir

$$(y_s)_j = -\frac{\overline{P}_i}{C^{\Delta}_{61}} \cdot \begin{bmatrix} A^{\Delta}_{11}(B^{\Delta}_{65}I_{s1} - B^{\Delta}_{63}I_{s2} + B^{\Delta}_{61}I_{s4}) \\ + A^{\Delta}_{21}(B^{\Delta}_{66}I_{s1} - B^{\Delta}_{63}I_{s3} + B^{\Delta}_{62}I_{s4}) \\ + A^{\Delta}_{41}(B^{\Delta}_{66}I_{s2} - B^{\Delta}_{65}I_{s3} + B^{\Delta}_{64}I_{s4})\end{bmatrix}\,, \tag{81}$$

wobei sich für $s = 1, 2, 3, 4$ die Komponenten w_j, $\overline{\varphi}_j$, $\overline{M}_j$, $\overline{Q}_j$ ergeben.

Die Gleichung (81) hat [wie die Gleichungen (73) und (76b)] eine sehr unangenehme Eigenschaft: Im Zähler treten Produkte von Elementen der Matrizen $\mathfrak{A}^{\Delta}$, $\mathfrak{B}^{\Delta}$ und $\mathfrak{J}$ auf, wobei die Matrix $\mathfrak{B}$ die Matrix $\mathfrak{J}$ enthält (Abb. 12). Liegt nun z. B. im Abschnitt der Matrix $\mathfrak{J}$ ein querelastisches Lager, das wir durch eine Matrix $\mathfrak{S}$ (47) mit $c_M = 0$ erfassen, so kommt in den Zählerprodukten die Federzahl c dieses Lagers zweimal vor: innerhalb der Matrizen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B}^{\Delta}$. Die so entstehenden c^2-Glieder im Zähler heben sich wieder weg, wenn wir die eckige Klammer von (81) ausrechnen. Abgesehen vom unnötigen Rechenaufwand wird dadurch die Rechnung sehr unsicher, wenn c groß ist und für starre Lager mit $c \to \infty$ müßten wir c als Parameter bis zum Schluß stehen lassen [vgl. auch (53)]. Um diesem Übel zu begegnen, wollen wir (81) auf eine Form bringen, bei

der eine Überlappung von Matrizen nicht mehr eintritt. Dies ist wieder durch eine Entwicklungsregel ähnlich den Regeln (74) und (77) möglich.

Zunächst wollen wir die drei in runden Klammern stehenden Ausdrücke von (81) als Determinanten dritter Ordnung schreiben:

$$(y_s)_j = -\frac{\overline{P_i}}{C^{\mathrm{I}}_{61}}\left(A^{\mathrm{I}}_{11}\begin{vmatrix} I_{s1} & I_{s2} & I_{s4} \\ B_{31} & B_{32} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{44} \end{vmatrix} + A^{\mathrm{I}}_{21}\begin{vmatrix} I_{s1} & I_{s3} & I_{s4} \\ B_{31} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{43} & B_{44} \end{vmatrix} + A^{\mathrm{I}}_{41}\begin{vmatrix} I_{s2} & I_{s3} & I_{s4} \\ B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{vmatrix} \right). \tag{82}$$

Für die hier auftretenden Determinanten dritter Ordnung gilt allgemein die folgende Entwicklungsregel: Wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{J}$ ist, so gilt

$$\begin{vmatrix} I_{sa} & I_{sb} & I_{sc} \\ B_{ta} & B_{tb} & B_{tc} \\ B_{ua} & B_{ub} & B_{uc} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i=1 \\ i<k}}^{3}\sum_{k=2}^{4} \begin{vmatrix} K_{ti} & K_{tk} \\ K_{ui} & K_{uk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_{sa} & I_{sb} & I_{sc} \\ I_{ia} & I_{ib} & I_{ic} \\ I_{ka} & I_{kb} & I_{kc} \end{vmatrix}; \tag{83}$$

Die Indices i, k durchlaufen dabei die sechs Kombinationen des Schemas (38). Die unter der Doppelsumme stehenden Determinanten zweiter Ordnung sind Elemente der Matrix $\mathfrak{K}^{\mathrm{I}}$. Von den sechs Determinanten dritter Ordnung aus Elementen der Matrix $\mathfrak{J}$ werden stets 3 zu Null, und zwar diejenigen mit $i = s$ oder $k = s$. Die drei nicht verschwindenden sind Unterdeterminanten der Matrix $\mathfrak{J}$, oder mit dem Vorzeichen $(-1)^{p+q}$ versehene Elemente der Kehrmatrix $\mathfrak{J}^{-1} = [I^{-1}_{pq}]^{\mathrm{I}}$, da die Gesamtdeterminante $I = |\mathfrak{J}| = 1$ ist. Somit erhalten wir aus (82) mit Hilfe der Entwicklungsregel (83)

$$w_j = -\frac{\overline{P_i}}{C^{\mathrm{I}}_{61}} \cdot \begin{bmatrix} A^{\mathrm{I}}_{11}\,(-K^{\mathrm{I}}_{64}\,I^{-1}_{34} + K^{\mathrm{I}}_{65}\,I^{-1}_{33} - K^{\mathrm{I}}_{66}\,I^{-1}_{32}) \\ +A^{\mathrm{I}}_{21}\,(\quad K^{\mathrm{I}}_{64}\,I^{-1}_{24} - K^{\mathrm{I}}_{65}\,I^{-1}_{23} + K^{\mathrm{I}}_{66}\,I^{-1}_{22}) \\ +A^{\mathrm{I}}_{41}\,(-K^{\mathrm{I}}_{64}\,I^{-1}_{14} + K^{\mathrm{I}}_{65}\,I^{-1}_{13} - K^{\mathrm{I}}_{66}\,I^{-1}_{12}) \end{bmatrix} \tag{84}$$

und entsprechend $\overline{\varphi}_j$, $\overline{M_j}$, $\overline{Q_j}$.

Mit Hilfe der Gleichungen (78) und (84) kann nun der Vektor $\mathfrak{y}$ für jede beliebige Stelle des Stabwerks bestimmt werden, und zwar auch dann, wenn das System beliebig viele elastische oder starre Zwischenlager enthält. Bei starren Lagern kann dabei der Grenzübergang $c \to \infty$ bereits in den Feldmatrizen vorgenommen werden.

11. Statische Einflußzahlen. Bei komplizierten Rahmengebilden wird man oft genötigt sein, das wirkliche System durch ein angenähertes mit n diskreten Massen[2] zu ersetzen und steht dann vor der Aufgabe, die statischen Einflußzahlen für die Angriffsorte dieser Massen zu gewinnen. Dies kann natürlich nach einem der üblichen statischen Verfahren geschehen: Die Einflußzahl h_{ab} ist die Verschiebung (Drehung) an der Stelle a durch die Last 1 (das Moment 1) an der Stelle b. Wir können für diese Aufgabe aber auch das Matrizenverfahren nutzbar machen.

Im statischen Fall geht die Matrix für ein homogenes Balkenstück mit $\mu \to 0$ über in $\mathfrak{E}$ (27), wenn wir die Schubelastizität mitberücksichtigen.

Auch hier gilt wieder die Gleichung (29) für einen aus mehreren Feldern bestehenden Abschnitt. Wir können nach Ziff. **6** die Determinanten-Matrix einer beliebigen Feld- oder Abschnittsmatrix aufstellen und erhalten so z. B. aus $\mathfrak{E}$ die Δ-Matrix $\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}$ (43). Ferner gilt die Matrix (47) für elastische Lager mit $m = 0$ bzw. $\Theta = 0$, es gelten auch die im II. Teil noch zu behandelnden Matrizen für Rahmentragwerke.

Auf das so durch Matrizen dargestellte elastische System soll nun an einer Stelle i die Last 1 (oder das Moment 1) wirken. Wir wollen uns hier auf den Fall einer äußeren Querlast $P_i = 1$ beschränken.

Wie bei den erzwungenen Schwingungen (Ziff. **10**) läßt sich eine äußere Kraft P_i dann sehr einfach erfassen, wenn i eine Randstelle ist. Symmetriestellen eines symmetrischen Tragwerks sind ebenfalls Randstellen in diesem Sinne.

Greift die statische Kraft $P_i = 1$ nicht an einem Rand, sondern innerhalb eines Tragwerks an, so können wir wieder genau so verfahren wie im Fall der erzwungenen Schwingungen. Mit $P_i = 1$ gelten alle Gleichungen von Ziff. **10** auch hier, wobei die Matrizen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$ jetzt reine Elastizitätsglieder repräsentieren. Insbesondere erhalten wir wieder $\mathfrak{y}_d$ aus (78) und $\mathfrak{y}_j$ aus (84), also

[1] *R. Zurmühl*, Matrizen, S. 36. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953.
[2] *H. Fuhrke*, Stahlbau 23 (1954), S. 181.

jede beliebige der vier mechanischen Größen w, ψ, M und Q an jeder beliebigen Stelle des Stabwerks. Für die Stelle i können wir die Gleichungen (79) verwenden; so wird z. B.

$$h_{ii} = \frac{\bar{l}^3}{EI} \frac{B_{55}^{\mathrm{I}} A_{11}^{\mathrm{I}} + B_{66}^{\mathrm{I}} A_{21}^{\mathrm{I}}}{C_{61}^{\mathrm{I}}} \quad . \tag{85}$$

Hat man auf diese Weise das Schema der Einflußzahlen h_{ik} bestimmt, so läßt sich die Eigenwertgleichung — in anderem Sinne als bisher — als Matrizengleichung formulieren. Bezeichnet $\mathfrak{H}^*$ die Matrix der Einflußzahlen, $\mathfrak{M}^*$ die Massen-, $\mathfrak{E}^*$ die Einheitsmatrix und $\lambda = 1/\omega^2$ den Eigenwert, so ist[1]

$$\mathfrak{H}^* \mathfrak{M}^* - \lambda \mathfrak{E}^* = 0 \tag{86}$$

die Eigenwertgleichung, die sich z. B. mit Hilfe des Verfahrens von *Hessenberg*[2] in eine Polynom-Gleichung n-ten Grades überführen läßt, deren n Wurzeln dann die n Eigenwerte des Systems sind. Da die Matrix $\mathfrak{H}^*$ symmetrisch ist, sind die n Wurzeln sämtlich reell und positiv.

12. Zahlenbeispiel: Die biegekritischen Drehzahlen einer Läufergruppe mit fünf Stützen. Für eine starr zusammengekuppelte Läufergruppe (Abb. 13, Tab. 1)[3], die fünffach gelagert ist, sollen

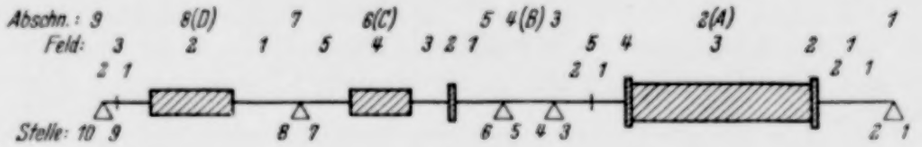

Abb. 13.

1) die vier untersten Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen berechnet werden, wobei die Stützen als vertikal starr anzusehen sind. Es soll 2) untersucht werden, welcher Einfluß auf die Lage der Eigenfrequenzen zu erwarten ist, wenn die Stützen nicht starr, sondern elastisch sind.

Wir verwenden die folgenden Matrizen:

für die Felder A_3, C_4, D_2	die *Rayleigh*-Matrix (8)
für die Felder B, C_1, C_3, C_5, D_1	die Elastizitäts-Matrix [(27) mit $\delta = 0$]
für die Felder A_2, A_4, C_2	die Massen-Matrix [(28) mit $\Theta = 0$]
für die Felder A_1, A_5, D_3	die Produkt-Matrix $\mathfrak{E}_2 \cdot \mathfrak{E}_1$ aus [(27) mit $\delta = 0$]
für die Stützen 1, 3, 5, 7, 9	die Stützen-Matrix $\mathfrak{S}$ [(47) mit $\Gamma_M = 0$ und $m = 0$]

Tabelle 1

Abschnitt	Feld	Länge (m)	Masse $\frac{\mathrm{t\,s^2}}{\mathrm{m}}$	Steifigkeit EI ($\mathrm{m^2\,t}$) $\cdot 10^{-4}$
A	1 1	0,720	0	1,2
	1 2	0,665	0	7,0
	2	0	0,255	—
	3	4,000	1,770	36,0
	4	0	0,255	—
	5 1	0,665	0	7,0
	5 2	0,750	0	1,2
B		1,045	0	0,8
C	1	0,942	0	0,6
	2	0	0,204	—
	3	0,815	0	1,2
	4	1,138	0,255	5,0
	5	0,915	0	0,52
D	1	1,335	0	0,44
	2	1,610	0,357	5,3
	3 1	0,715	0	0,55
	3 2	0,135	0	0,07

[1] Vgl. z. B. *I. P. Den Hartog*, Mechanische Schwingungen, S. 143 f. oder *R. Zurmühl*, Matrizen, S. 348 f.

[2] *R. Zurmühl*, Praktische Mathematik, S. 136, Berlin 1953.

[3] Das System ist hier stark vereinfacht. Dieselbe Läufergruppe wurde im IPM Darmstadt mit einer Aufteilung in 47 Felder berechnet, wobei der interessierende Frequenzbereich in 50 Intervalle unterteilt wurde.

Wir ermitteln die Abschnittsmatrizen für $\omega = 150, 200, 250, 300, 320, 340, 400$. Die Matrizen für die masselosen Felder sind frequenzunabhängig, wir brauchen sie nur einmal aufzustellen. Für die Funktionen (4) der $\mathfrak{R}$-Matrizen verwenden wir die dort angegebenen Reihen, die sich auf der Rechenmaschine bequem bestimmen lassen. Tabelle 2 zeigt das Rechenschema für die Abschnittsmatrix $\mathfrak{A}$ bei $\omega = 320/\text{sec}$. Dabei sind die Bezugsgrößen $l = 1$ m und $\overline{EI} = 10^4$ m²t gewählt. Für die Lager wäre dann nach (46) $\Gamma_Q = 10^{-4}\, c$ mit c in t/m in $\mathfrak{E}^{\Delta}$ (48) einzusetzen. Wir setzen besser $\Gamma_Q = c$ mit c in $t/0{,}1$ mm um angenehmer rechnen zu können.

Aus den Abschnittsmatrizen bilden wir die zugeordneten Determinanten-Matrizen [nach (38)], z. B. $\mathfrak{A}^{\Delta}$ aus $\mathfrak{A}$ (Tabelle 3)[1]. Die Frequenzgleichung lautet mit $M = 0, Q = 0$ am linken und rechten Rand (Abb. 7)

$$X^{\Delta}_{01} = \Delta = 0\,, \tag{87a}$$

wobei

$$\mathfrak{X}^{\Delta} = \mathfrak{E}^{\Delta} \cdot \mathfrak{D}^{\Delta} \cdot \mathfrak{E}^{\Delta} \cdot \mathfrak{C}^{\Delta} \cdot \mathfrak{E}^{\Delta} \cdot \mathfrak{B}^{\Delta} \cdot \mathfrak{E}^{\Delta} \cdot \mathfrak{A}^{\Delta} \cdot \mathfrak{E}^{\Delta} \tag{87b}$$

ist. Ferner ist das für $\psi_1 = 1$ am rechten Rand erforderliche Erregermoment M_{10} am linken Rand ($M_{10} = 0$ für $\omega = \omega_e$) [vgl. (64)]

$$M_{10} = -\frac{\Delta}{A_{14}\, B_{14}\, C_{14}\, D_{14}}\, 10^4 \text{ m t}\,. \tag{88}$$

Tabelle 4 zeigt diese Rechnung für $\omega = 320$, wobei innerhalb der einzelnen Matrizenelemente nach Potenzen von $\Gamma = c$ geordnet ist.

Tabelle 2: *Rechenschema für die Abschnittsmatrix* $\mathfrak{A}$.

$\alpha_3 = 36$; $\mu_3 l_3 = m_3 = 1{,}77$;	$C = 2{,}370141$
$\beta_3 = 4$;	$S = 1{,}271724$
$\lambda^4 = 32{,}262$	$c = 0{,}545096$
$\lambda^8 = 1040{,}85$	$s = 0{,}173094$

1			
	1		
		1	
2,6112			1

4

2,37014	5,08690	0,24257	0,30811
1,39610	2,37014	0,14148	0,24257
39,5190	50,1967	2,37014	5,08690
23,0497	39,5190	1,39610	2,37014

3

1			
	1		
		1	
2,6112			1

2

1	1,385		0,2253
0	1		0,3161
0	0		1,385
0	0		1

1

1	1,415	0,3374	0,2452
0	1	0,7202	0,6817
0	0	1	1,415
0	0	0	1

5

2,37014	5,08690	0,24257	0,30811
1,39610	2,37014	0,14148	0,24257
39,5190	50,1967	2,37014	5,08690
29,2387	52,8019	2,02950	3,17468

43

24,8487	38,3240	1,74008	3,14610
49,7897	74,5169	3,23196	6,07033
80,8917	124,911	5,24188	9,57907
29,2387	52,8019	2,02950	3,17468

5-3

1	1,38500		0,22530
0	1		0,31610
0	1		1,38500
2,6112	3,61651		1,58830

21

$$\mathfrak{A} = \begin{array}{|cccc|} \hline 33{,}0638 & 84{,}1174 & & 25{,}1196 \\ 65{,}6405 & 165{,}429 & & 48{,}8902 \\ 105{,}905 & 271{,}589 & & 80{,}1839 \\ 37{,}5284 & 104{,}779 & & 31{,}1314 \\ \hline \end{array}_{5\text{-}1} \qquad \boxed{\omega = 320}$$

[1] Die Matrizen und Δ-Matrizen brauchen dabei nicht voll besetzt zu sein, wie das die Tabellen 2 bis 4 zeigen.

Tabelle 3. *Determinanten-Matrix*[1] $\mathfrak{M}^{\Delta}$ *für* $\omega = 320$.

— 51,80	.	.	.	—43,00*	.
+ 71,35	.	.	.	—77,36*	.
+ 307,6	.	.	.	—13,31	.
+ 307,6	.	.	.	—13,31	.
+ 669,4	.	.	.	+27,38	.
+ 904,24	.	.	.	+53,38	.

Tabelle 4. *Eigenwert-Determinante* Δ *für elastische Lager.*

6. Zeile der Matrix ($\mathfrak{Z}^{\Delta} \cdot \mathfrak{D}^{\Delta}$) ($= D^{\Delta}_{6i} \cdot c + D^{\Delta}_{6i} \cdot 1$):

— 9,251	— 30,58	— 21,71	— 21,71	— 15,95*	— 1,804*	$\cdot c$
+ 2,867	+ 5,392	— 1,457	— 1,456	— 11,45	— 22,27	$\cdot 1$

6. Zeile der Matrix ($\mathfrak{Z}^{\Delta} \cdot \mathfrak{D}^{\Delta} \cdot \mathfrak{Z}^{\Delta}$):

— 15,95*	— 1,804*	0	0	0	0	$\cdot c^2$
— 20,70	— 52,85	— 21,71	— 21,71	— 15,95	— 1,804	$\cdot c$
+ 2,867	+ 5,392	— 1,457	— 1,456	— 11,45	— 22,27	$\cdot 1$
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	

6. Zeile der Matrix ($\mathfrak{Z}^{\Delta} \cdot \mathfrak{D}^{\Delta} \cdot \mathfrak{Z}^{\Delta} \cdot \mathfrak{C}^{\Delta} \cdot \mathfrak{Z}^{\Delta} \mathfrak{B}^{\Delta} \cdot \mathfrak{Z}^{\Delta}$):

— 76,04*	— 43,09*	0	0	0	0	$\cdot c^4$
+ 4248	+ 1961,7	— 28,81	— 28,86	— 76,03	— 43,08	$\cdot c^3$
+ 12335	+ 12570	+ 3786	+ 3785	+ 4055	+ 1863	$\cdot c^2$
— 837,6	+ 4087	+ 5733	+ 5732	+ 9940	+ 7820	$\cdot c$
— 597,65	+ 1767	— 1760	— 1760	— 1771,9	— 55,37	$\cdot 1$

6. Zeile der Matrix ($\mathfrak{Z}^{\Delta} \cdot \mathfrak{D}^{\Delta} \cdot \mathfrak{Z}^{\Delta} \cdot \mathfrak{C}^{\Delta} \cdot \mathfrak{Z}^{\Delta} \cdot \mathfrak{B}^{\Delta} \cdot \mathfrak{Z}^{\Delta} \cdot \mathfrak{M}^{\Delta}$):

+ 864,5	+ 6603*	$\cdot c^4$
— 187,70 · 10^3	— 338 · 10^3	$\cdot c^3$
+ 6986 · 10^3	— 1393 · 10^3	$\cdot c^2$
+ 17580 · 10^3	+ 256,7 · 10^3	$\cdot c$
— 2414 · 10^3	+ 157,8 · 10^3	$\cdot 1$
1. Spalte	5. Spalte	

$\Delta/10^3 =$

+ 6,603	$\cdot c^5$ *	
— 337,1	$\cdot c^4$	$c \to \infty$:
— 1581	$\cdot c^3$	$M_{10} = -47{,}4 \cdot 10^3$ *
+ 7243	$\cdot c^2$	
+ 17740	$\cdot c$	
— 2414	$\cdot 1$	$\omega = 320$

Für $\omega = 320$ wird also bei starren Lagern $\Delta = +6603$, oder M_{10} ($\psi_1 = 1\text{mm/m}$) $= -47{,}4$ mt; bei elastischen Lagern ergibt sich für Δ ein Polynom fünften Grades. Wir können hieraus Δ für eine bestimmte Federzahl c bestimmen, oder wir können auch diejenige Federzahl c als Wurzel der Gleichung $\Delta = 0$ ermitteln, für die $\omega = 320$ Eigenfrequenz wird. So erhalten wir hier $c = 550$ t/mm (die übrigen Wurzeln sind nicht reell). Führt man die Rechnung für weitere Frequenzen ω durch, so lassen sich aus den Kurven $\Delta(\omega)$ oder $M_{10}(\omega)$ die Nulldurchgänge und damit die Eigenfrequenzen bei starren oder elastischen Lagern finden; oder man kann $c(\omega)$ aufstellen, was für die Beurteilung konstruktiver Änderungen von besonderem Vorteil sein kann.

13. Schlußbemerkung. In dem vorliegenden Teil I wurden die Grundzüge der Anwendung des Matrizenkalküls auf Balkenbiegeschwingungen entwickelt. In einem folgenden Teil II soll das Anwendungsgebiet der Matrizenrechnung erweitert werden auf die Bestimmung von Rahmenschwingungen, bei denen im allgemeinen Fall die Biegeschwingungen gekoppelt sind mit Längs- oder Torsionsschwingungen. Diese Kopplung führt zu Matrizengleichungen sechsten Grades. Sie ermöglichen es, offene und geschlossene Rahmen zu erfassen, unter gewissen Voraussetzungen auch Stockwerkrahmen und Rahmenfundamente.

(Eingegangen am 18. November 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *H. Fuhrke*, Fellbach (Württ.), Heinrich-Heine-Str. 8.

[1] Für den Fall starrer Lager werden nur die mit * bezeichneten Elemente benötigt.

Über ein Verfahren zur Bestimmung der Biegemomente von Platten unter Einzellasten

Von S. Woinowsky-Krieger

1. Einleitung. Die Differenzenrechnung bietet in ihrer Anwendung auf Probleme der Plattenbiegung den wohlbekannten Vorteil einer weitgehenden Anpassungsfähigkeit an die vorgeschriebenen Randbedingungen der Platte; demgegenüber steht ihr Nachteil, keine Ergebnisse von allgemeiner Gültigkeit zu liefern.

Es handele sich insbesondere um die Bestimmung der maximalen Feldmomente einer dünnen Platte im Falle einer Einzelkraft, die sich etwa gleichförmig auf eine gewisse Druckfläche verteilen möge. Will man diese Aufgabe unter Anwendung eines numerischen Verfahrens, insbesondere der Differenzenrechnung lösen, so müssen vorerst spezielle Annahmen über die Begrenzung der Lastfläche gemacht werden. Die auf dieser Grundlage gewonnenen Ergebnisse lassen sich dann aber nicht auf Druckflächen einer anderen Form oder Größe übertragen.

Die im folgenden entwickelte einfache Methode gestattet es nun, die einer numerischen Rechnung entnommenen und für einen Einzelfall der Belastung gültigen Momentenwerte zum Aufbau ziemlich allgemeiner Ausdrücke für Biegemomente in der Mitte einer rechteckigen oder kreisförmigen Lastfläche nutzbar zu machen und eine wiederholte Anwendung des numerischen Verfahrens auf diese Weise zu umgehen.

2. Grundlage des Verfahrens. Die Belastung einer isotropen dünnen Platte von konstanter Biegesteifigkeit D bestehe aus einer Einzelkraft P, die sich gleichförmig und zwar zunächst auf die Fläche eines Rechteckes mit den Seitenlängen s und t verteilen möge. Zur Vereinfachung des Problems werde angenommen. daß die Biegefläche der Platte mindestens eine, den Mittelpunkt der Lastfläche enthaltende Symmetrieachse besitzt. Schließlich müssen noch s und t als klein im Verhältnis zu den Grundrißabmessungen der Platte, sowie zu der kleinsten Entfernung der Lastfläche vom Plattenrand vorausgesetzt werden.

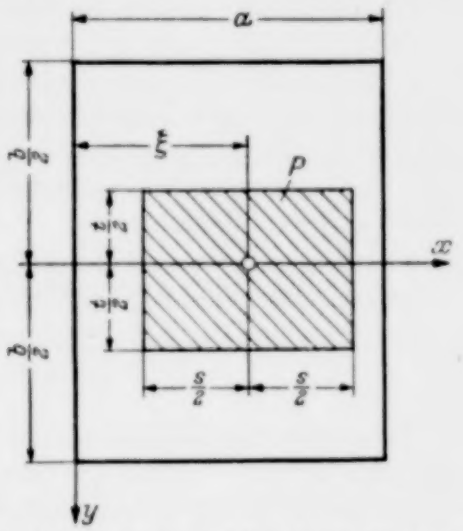

Abb. 1. Rechteckige Platte mit einer Einzellast.

Im Sonderfall der nach Abb. 1 belasteten, allseitig freigestützten Rechteckplatte läßt sich zeigen, daß die beiden Biegemomente m_x und m_y im Schwerpunkt der Druckfläche durch die Relationen[1]

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)\,P}{4\pi}\left(2\ln\frac{4\,a\sin\frac{\pi\xi}{a}}{\pi\sqrt{s^2+t^2}} + \lambda - \varphi\right), \\ m_x - m_y &= \frac{(1-\nu)\,P}{4\pi}(\mu+\psi) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

bestimmt sind. Während ν hierin die Querdehnungszahl bezeichnet, gelten für die Größen φ und ψ in guter Näherung die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \varphi(k) &= k\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\,\mathrm{arc\,tg}\,k, \\ \psi(k) &= k\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\,\mathrm{arc\,tg}\,k \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

mit $k = t/s$. Die von φ, ψ und dem Logarithmus-Glied abhängigen Momentenanteile entsprechen dem Spannungszustand einer gewissen Kreisplatte, die in ihrem Mittelpunkt eine gleichförmig über die Rechteckfläche $s \times t$ verteilte Einzelkraft P trägt. Die (weiter nicht benötigten) Größen λ und μ sind dagegen Korrekturglieder, die dem Unterschied zwischen jener Kreisplatte und der gegebenen Rechteckplatte, sowie der speziellen Stellung der Last auf dieser letzteren Platte Rech-

[1] *S. Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 335.

nung tragen. Dementsprechend hängen λ und μ wohl von den Verhältniszahlen b/a und ξ/a, nicht aber von der Art der Lastkonzentration ab.

Allen weiteren Betrachtungen sei die etwas allgemeinere Form

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)\,P}{4\,\pi}\left(\ln\frac{a^2}{s^2+t^2} + \varkappa - \varphi\right), \\ m_x - m_y &= \frac{(1-\nu)\,P}{4\,\pi}(\mu + \psi) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

der Beziehungen (1) zugrunde gelegt, wobei zwischen der früher eingeführten Größe λ und der neuen $\varkappa$ die einfache Relation

$$\varkappa = \lambda + 2\ln\frac{4\sin\frac{\pi\,\xi}{a}}{\pi} \tag{4}$$

besteht. Die Ausdrücke (3) gelten zunächst nur für die freigestützte Rechteckplatte nach Abb. 1. Eine Änderung der Grenzbedingungen dieser Platte oder gar ihrer Gestalt würde aber nach dem Vorhergesagten nur die Größen $\varkappa$ und μ beeinflussen, während man die Größe a als eine nunmehr willkürliche Vergleichslänge beibehalten könnte. Von ihrer Wahl bleibt allerdings die Größe $\varkappa$ mit abhängig.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich, wenn nach den Biegemomenten in der Mitte einer in gewissen Grenzen beliebigen Rechteckfläche $s \times t$ gefragt wird, der folgende Vorgang zu deren Ermittlung. Man berechnet zuerst die Biegemomente nach einem numerischen Verfahren für ein nach praktischen Gesichtspunkten gewähltes Wertepaar s_0/a und t_0/a und die gewünschte Stellung der Last. Die Werte s_0 und t_0 sollten von gleicher Größenordnung sein und am besten etwa 10 bis 20% der kürzesten Grundrißabmessung der Platte betragen. Bei Anwendung der Differenzenrechnung wird man auch für ein ganzzahliges Verhältnis von s_0 und t_0 zu den Maschenweiten des örtlichen (dichteren) Netzes in den entsprechenden Richtungen sorgen müssen. Hinsichtlich der Querdehnungszahl ν sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1) Die Zahl ν geht in die Randbedingungen des Plattenproblems nicht ein.

2) Die Zahl ν ist in den Randbedingungen mit enthalten.

Nur im Falle 2) wird man außer vom Wertepaar s_0/a, t_0/a auch von einem bestimmten numerischen Wert von ν ausgehen müssen.

Die Rechnung wird nun für die Krümmungen der Platte $\partial^2 w/\partial x^2$ und $\partial^2 w/\partial y^2$ im Schwerpunkt der Lastfläche gewisse numerische Werte liefern und die zugehörigen Biegemomente ergeben sich dann aus den Relationen

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= -D(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ m_x - m_y &= -D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Nachdem das Ergebnis (5) feststeht, ist auch der linke Teil der Gleichungen (3) für das Wertepaar s_0/a, t_0/a bekannt. Die zugehörigen Werte φ_0 und ψ_0 von φ und ψ sind durch die Ausdrücke (2) als Funktionen von $k_0 = t_0/s_0$ ebenfalls gegeben und nun können die Größen $\varkappa$ und μ auf der rechten Seite der Gleichungen (3) eindeutig bestimmt werden. Die Biegemomente am Lastort für beliebige Werte s/a und t/a findet man endgültig aus den Gleichungen (3), die nunmehr rechterhand lauter bekannte Größen enthalten. Die Zahl ν geht nur im Falle 2) in die berechneten Werte $\partial^2 w/\partial x^2$ und $\partial^2 w/\partial y^2$ wirklich ein. Wie ein Vergleich der Gleichungssysteme (3) und (5) sofort lehrt, sind auch die Größen $\varkappa$ und μ nur in diesem Fall 2) von der Querdehnungszahl ν mit abhängig.

Ist die wirkliche Aufstandsfläche der Last nicht ein Rechteck, sondern ein Kreis vom Halbmesser c, so bedürfen die Gleichungen (3) einer Umformung, die sich aus der folgenden Überlegung ergibt.

Im Mittelpunkt einer eingespannten Kreisplatte vom Halbmesser a mit zentrischer, quadratischer ($s = t$) beziehungsweise kreisförmiger Druckfläche der Last gelten die Ausdrücke[1]

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)\,P}{4\,\pi}\left(\ln\frac{2\,a^2}{s^2} + 2 - \frac{\pi}{2}\right), \\ m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)\,P}{4\,\pi}\left(\ln\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{2\,a^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

[1] S. *Woinowsky-Krieger*, a. a. O., S. 332.

für die Momentensummen. Ist $c/a \ll 1$ und vernachlässigt man demzufolge das Glied $c/2\,a$ gegen den Logarithmus, so führt die Gleichsetzung der beiden Momentensummen zu der Beziehung

$$s = t = c\sqrt{2}\,e^{1-\frac{\pi}{4}} = 1{,}753\,c\,, \tag{7}$$

die die Bedingung für die Äquivalenz der quadratischen und der kreisförmigen Lastfläche ausdrückt. Die Frage nach der Größe der Biegemomente im letzteren Falle wird somit durch das Einsetzen des Wertes (7) für s und t, sowie von $\varphi = \pi/2$ und $\psi = 0$ in die Gleichungen (3) erledigt.

Liegt eine Platte von polygonaler, aber nicht rechteckiger Begrenzung vor, so wird man zur Grundlage der Differenzenrechnung auch entsprechend begrenzte Lastflächen wählen müssen. Beispielsweise könnte es sich dabei um Dreiecke, Sechsecke oder Rhomben handeln. Die Ableitung von Übergangsformeln von derartigen Druckflächen zu der kreisförmigen reduziert sich stets auf eine Quadratur[1]. Hiermit wird aber auch der Übergang zur rechteckigen Druckfläche gesichert, die in der technischen Praxis am häufigsten vorkommt.

3. Beispiele zur Beurteilung der Genauigkeit der Differenzenrechnung. Stellt man die aus den Ausdrücken (1) gewonnenen Momentenwerte Werten gegenüber, die sich durch direkte Anwendung strenger Lösungen, meist in Form von einfachen Reihen, ergeben, so drücken sich die dabei begangenen Fehler in Bruchteilen eines Prozentes aus, sofern etwa $s/a < 0{,}5$, $t/b < 0{,}5$ bleibt und die Plattengestalt nicht ausgesprochen länglich ist. Da aber bei der Anwendung der Methode die Fehlerquelle ebensogut in der Differenzenrechnung liegen kann, ist es nicht uninteressant, sich von der Genauigkeit dieser letzteren an Hand einiger Beispiele ein Bild zu machen.

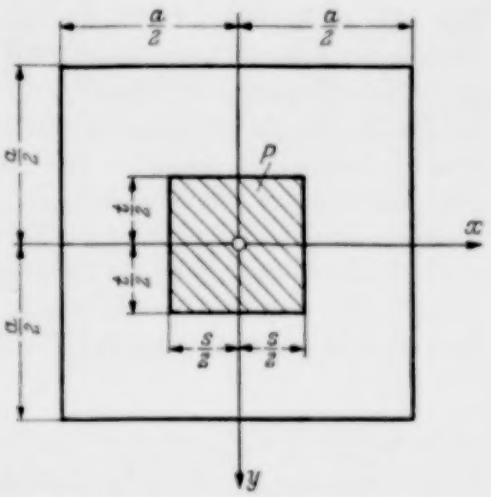

Abb. 2. Quadratische Platte mit einer zentrischen Einzellast.

Für die Biegemomente in der Mitte einer durch eine Einzelkraft P belasteten freiaufliegenden quadratischen Platte nach Abb. 2 findet *H. Marcus* die Werte[2]

$$m_x = m_y = 0{,}263451\,P\,, \tag{8}$$

wobei $s = t = 0{,}125\,a$ und $\nu = 0{,}3$ vorausgesetzt wird. Die erste der Gleichungen (1) liefert im selben Falle, da[3] $\lambda = 2{,}669$ (für $a = b = 2\,\xi$) und $\varphi = \pi/2$ (für $s = t$) anzunehmen sind,

$$m_x = m_y = 0{,}261\,P. \tag{9}$$

Da die Formeln (1) gerade bei der quadratischen Platte sehr genau sind, kommt der Unterschied von 0,9% zwischen den Werten (8) und (9) größtenteils auf das Konto der Differenzenrechnung.

Für die allseitig eingespannte Platte, sonst aber unter den gleichen Voraussetzungen wie zuvor, liefert die Differenzenrechnung[4]

$$m_x = m_y = 0{,}223\,P\,, \tag{10}$$

während die notwendige Korrektur des Wertes (9) sich auf Grund vorhandener analytischer Lösungen für die eingespannte Platte leicht ausrechnen läßt[5]. Stellt man dabei nur 7 Glieder, der das Einspannungsmoment darstellenden unendlichen Reihe in Rechnung, so ergibt sich die Einwirkung der Randeinspannung auf die Biegemomente in Plattenmitte zu $-0{,}042\,P$, und man findet für die letzteren Momente selbst die Werte

$$m_x = m_y = 0{,}219\,P\,. \tag{11}$$

Die Ergebnisse (10) und (11) weichen somit um 1,8% voneinander ab. Im Sonderfall von Stahlbetonplatten ist diese Differenz immer noch erheblich kleiner als der von der Unsicherheit des ν-Wertes des Materials herrührende Fehler in der Bestimmung der Momente.

---

[1] S. *Woinowsky-Krieger*, a. a. O., S. 332.

[2] *H. Marcus*, Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, S. 70, Berlin 1932.

[3] S. *Woinowsky-Krieger*, a. a. O., S. 336, 334.

[4] Der von *H. Marcus*, a. a. O., S. 161, angegebene Momentenwert 0,163094 P ist indessen fehlerhaft und das ihm zugrunde liegende Moment 0,20352 P der freigestützten Platte unverständlich. Der Einfluß der Einspannung ist nach *Marcus*, $-0{,}040426\,P$ (S. 161); zieht man ihn vom Wert (8) ab, so erhält man das Resultat (10).

[5] *Dana Young*, J. Appl. Mech. 6 (1939), S. A—114.

4. Die nur in den Eckpunkten abgestützte quadratische Platte mit zentrischer Einzellast. Die Differenzenrechnung ist zur Behandlung dieses Problems sehr wohl geeignet; es möge daher auch als Grundlage für die Anwendung des im Abschnitt **2** beschriebenen Verfahrens gewählt werden.

Die Biegemomente im Mittelpunkt $x = y = 0$ der quadratischen Platte mit freien Rändern nach Abb. 2 berechnen sich für $s_0 = t_0 = 0{,}125$ und $\nu = 0{,}3$ zu[1]

$$m_x = m_y = 0{,}34461\ P\,. \tag{12}$$

Nach Einsetzen dieser Werte in die erste der Gleichungen (3) erhält man wegen $\varphi_0 = \pi/2$ den Wert $\varkappa = 4{,}767$, während die zweite Gleichung mit $\psi_0 = 0$ den Wert $\mu = 0$ liefert.

Geht man mit den so erhaltenen Werten $\varkappa$ und μ und außerdem noch mit $\nu = 0{,}3$ in die Gleichungen (3) ein, so findet man für die Lastfläche in der Form eines beliebigen Rechteckes die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \left[0{,}1034\left(\ln\frac{a^2}{s^2+t^2} - \varphi\right) + 0{,}492\right] P\,, \\ m_x - m_y &= 0{,}0557\,\psi\ P\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die hier enthaltenen Größen φ und ψ sind nach wie vor durch die Ausdrücke (2) bestimmt. Die Lösung ist hiermit hergestellt, und es sind nur noch einige Worte über die Rolle zu sagen, die darin die Querdehnungszahl spielt.

Da die Randbedingungen der Platte nur für $\nu = 0{,}3$ erfüllt sind, so wurde eben dieser Wert der Querdehnungszahl auch für die Faktoren $1 + \nu$ und $1 - \nu$ in den Gleichungen (3) beibehalten; er liegt somit auch den Beziehungen (13) zugrunde.

Mit abnehmendem ν vergrößern sich die Durchbiegungen der Platte nicht unerheblich, somit auch die Krümmungen; die Biegemomente in Plattenmitte werden aber durch die Zahl ν nur wenig beeinflußt. So sind beispielsweise die Biegemomente in der Mitte einer gleichförmig durch eine Last Q belasteten, nur an den Ecken aufruhenden quadratischen Platte gleich

$$m_x = m_y = 0{,}1090\,Q\,, \tag{14}$$

wenn man $\nu = 0{,}3$ annimmt[2] und sie haben den Wert $0{,}1109\,Q$ falls mit $\nu = 0{,}25$ gerechnet wird[3]. Weicht also die tatsächliche Querdehnungszahl von dem Wert $\nu = 0{,}3$ ab, so erscheint es richtiger, die Biegemomente trotzdem nach den Gleichungen (13) zu berechnen, als etwa die Momentensumme in (13) mit dem Faktor $(1 + \nu)/1{,}3$ zu vervielfachen.

5. Quadratische Fundamentplatte bei gleichförmiger Bodenpressung. Es ist naheliegend, die soeben gewonnenen Ergebnisse auf den Fall einer zentrisch belasteten quadratischen Fundamentplatte von konstanter Biegesteifigkeit anzuwenden. Trotzdem man über verschiedene Theorien verfügt, die, je nach der Beschaffenheit des Baugrundes, die Verteilung der Bodenreaktion über die Fundamentsohle mehr oder weniger zutreffend angeben, wird in der Praxis noch sehr oft mit einer gleichförmigen Bodenpressung bei zentrischer Auflast gerechnet. Für die Bemessung der Plattenbewehrung ist dies fast stets eine sichere Annahme. Vom Standpunkt der Bodenziffertheorie würde sie einer absolut steifen Platte entsprechen.

Die Auflast P möge sich nach wie vor gleichförmig über eine Rechteckfläche nach Abb. 2 verteilen. Die zugehörigen Biegemomente in Plattenmitte ergeben sich dann durch eine einfache Superposition der Werte (13) mit dem Wert (14), wo offenbar $Q = -P$ zu setzen ist. Die Momentensumme in den Ausdrücken (13) verringert sich nun um den Wert $0{,}218\ P$, und das Endergebnis lautet

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \left[0{,}1034\left(\ln\frac{a^2}{s^2+t^2} - \varphi\right) + 0{,}274\right] P\,, \\ m_x - m_y &= 0{,}0557\,\psi\ P\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Die Ausdrücke gelten streng genommen nur für $\nu = 0{,}3$, praktisch aber für ein beliebiges ν. Wie oben ausgeführt, ist der Einfluß der Querdehnungszahl auf die Biegemomente in Plattenmitte in der Tat nur gering und eine übertriebene Genauigkeit wäre gerade bei der Bemessung von Fundamentplatten fehl am Platze.

[1] *H. Marcus*, a. a. O., S. 188.
[2] *H. Marcus*, a. a. O., S. 181.
[3] *B. Galerkin*, Gesammelte Werke Bd. 2, S. 22, Moskau 1953 (Russisch).

Verteilt sich die Auflast anstatt auf eine Rechteckfläche gleichförmig auf eine Kreisfläche mit dem Halbmesser c, so hat man in den vorstehenden Gleichungen s und t durch $1{,}753\,c$ zu ersetzen und schließlich noch $\varphi = \pi/2$ und $\psi = 0$ anzunehmen. Die Biegemomente in der Plattenmitte ergeben sich dann gleich

$$m_x = m_y = \left(0{,}1034 \ln \frac{a}{c} - 0{,}038\right) P . \tag{16}$$

Der für die Anordnung der Stahlbewehrung wichtige Verlauf der Biegemomente längs der Symmetrieachsen $x = 0$ und $y = 0$ der Platte ist auf Abb. 3 für $c = 0{,}05\,a$ und $c = 0{,}1\,a$ als Beispiel dargestellt. Die Auftragung der Momentenkurven wird durch die folgenden Überlegungen erleichtert:

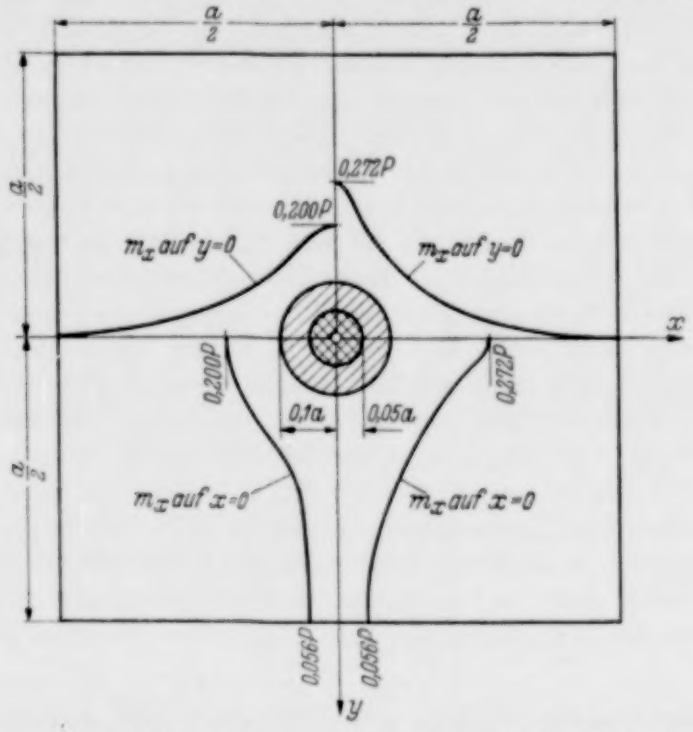

Abb. 3. Biegemomente m_x in den Schnitten $x = 0$ bzw. $y = 0$ einer quadratischen Fundamentplatte unter zentrischer, auf eine Kreisfläche vom Halbmesser c verteilter Einzellast P und gleichförmiger Bodenpressung. Links Momente für $c/a = 0{,}10$, rechts für $c/a = 0{,}05$; $\nu = 0{,}3$.

1) Die Biegemomente in der Nähe der Plattenränder werden durch die Art der Lastkonzentration nur wenig beeinflußt solange die Druckfläche klein bleibt im Verhältnis zu der Fläche der ganzen Platte. Die betreffenden Momentenwerte lassen sich also den Ergebnissen der Differenzenrechnung entnehmen.

2) Am Rande des Druckkreises ist das tangentiale Biegemoment um etwa $\nu\, P/4\,\pi$ und das radiale Moment um etwa $P/4\,\pi$ kleiner als der Scheitelwert beider Momente $m_x = m_y$ in der Plattenmitte[1].

3) Der Durchschnittswert der tangentialen Spannungsmomente, also etwa der Momente m_x im Schnitte $x = 0$ läßt sich aus dem statischen Moment der an einer Plattenhälfte angreifenden Kräfte in einfacher Weise berechnen.

6. Schlußbemerkung. Allen bisherigen Ausführungen lag die Annahme einer gleichförmigen Verteilung der Last auf eine Druckfläche von gegebener Form zugrunde. Vom technischen Standpunkt aus ist noch der Fall einer Einspannung der Platte, etwa einer Fundamentplatte längs der Randlinie einer Säule, also der Lastfläche, von Bedeutung. Anstatt der Biegemomente in der Mitte der Lastfläche müssen alsdann die Einspannmomente um die Säule herum als die maßgebenden Plattenmomente angesehen werden. Im Sonderfalle einer kreisrunden Säule ist es nicht schwer von den ersteren auf die letzteren zu schließen, doch soll hier auf diese Frage nicht eingegangen werden. Wesentlich verwickelter liegen die Verhältnisse bei der rechteckigen Säule. Bei einem Material ohne Fließgrenze würden dabei die Plattenbeanspruchungen mit der Annäherung an die Säulenecken ins Unendliche gehen. Bei einem nicht ideellen Material dagegen hätte man hier mit einem elastisch-plastischen Deformationszustand der Platte rechnen müssen.

(Eingegangen am 26. November 1954.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. S. *Woinowsky-Krieger*, Quebec, Que. Canada, 200 Ave. Marguerite Bourgeoys Apt. 8.

[1] *A. Nadai*, Die elastischen Platten, S. 63, Berlin 1925.

Nichtlineare Schwingungen und kinetische Instabilität bei Saiten und Stäben

Von E. Mettler

1. Einleitung. Das Problem der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper ist in letzter Zeit viel bearbeitet worden; man zählt heute etwa 30 Veröffentlichungen über diesen Gegenstand[1]. Trotzdem kann man nicht sagen, daß das Problem erschöpfend gelöst ist. Vielmehr muß auffallen, daß die theoretisch so viel erörterte Instabilitätserscheinung nie praktisch beobachtet worden ist (mit einer Ausnahme, die noch besprochen wird), und im Zusammenhang damit drängt sich die Frage auf, wie sich das merkwürdige Phänomen eigentlich äußern muß oder was man bei einer experimentellen Verwirklichung als sichtbare Erscheinung zu erwarten hat.

Die letztere Frage läßt sich natürlich mit der bisher fast allein geförderten linearisierten Stabilitätstheorie nicht vollständig beantworten. Denn diese kann zwar bestimmte Schwingungen als stabil oder instabil nachweisen, sie sagt aber gerade in dem zur Diskussion gestellten Instabilitätsfall lediglich aus, was man nicht beobachtet (nämlich die instabile Schwingung). Dagegen kann die lineare Theorie ihrem Wesen nach nicht angeben, welche Bewegung an Stelle der instabilen Schwingung wirklich eintritt. Das leistet nur eine nichtlineare Theorie, die allerdings bisher nicht über einige wenige Ansätze hinaus gediehen ist, wobei sie sich auf die Biegeschwingungen von Saiten und Stäben beschränkte. Die folgenden Ausführungen beschäftigen sich zunächst in Abschnitt **2** mit einer Zusammenstellung und Deutung dieser letztgenannten Ergebnisse, die somit das Verhalten einer elastischen Schwingung in der Umgebung eines Instabilitätsbereichs erster Art wiedergeben. In Abschnitt **3** werden einige darüber hinausgehende Untersuchungen über die Kippschwingungen des Stabes angestellt mit dem Ziel, entsprechende Ergebnisse für einen Bereich zweiter Art zu gewinnen.

2. Biegeschwingungen von Stab und Saite[2]. a) Freie und quererregte Schwingungen. Zur Vorbereitung des folgenden betrachten wir einen geraden Stab mit konstanter Biegesteifigkeit EJ, Massenbelegung μ und Länge l. Er sei beiderseits gelenkig gelagert und trage die Querbelastung $p(x, t)$ sowie die eingeprägte Längskraft $P = \text{const}$. Die Längenkoordinate sei wie üblich x, die Zeit t, tiefgestellte Indizes x und t bedeuten Ableitung nach diesen Größen. Die Querschwingung mit der Auslenkung w gehorcht dann der bekannten Differentialgleichung

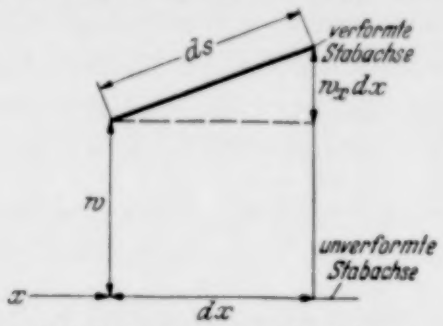

Abb. 1. Zur Berechnung der Dehnung der Stabachse.

$$EJ\,w_{xxxx} + S\,w_{xx} + \mu\,w_{tt} = p\,, \tag{1}$$

worin die Längskraft S (als Druckkraft positiv gerechnet) in zwei Anteile zerfällt: die Vorlast P und die Zusatzkraft ΔP, die durch die Dehnung der Stabachse bei der Ausbiegung geweckt wird. Diese Dehnung ist nach Abb. 1 gleich $(ds - dx)/dx = \sqrt{1 + w_x^2} - 1 \approx w_x^2/2$, die mittlere Dehnung somit

$$e_{mittel} = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{w_x^2}{2}\,dx\,.$$

Der Ausdruck

$$\Delta P \approx E\,F\,e_{mittel} = \frac{E\,F}{2\,l}\int_0^l w_x^2\,dx \tag{2}$$

ist also eine plausible Näherung für ΔP, und (1) geht mit $S = P - \Delta P$ in eine Integrodifferentialgleichung über.

[1] S. die Literaturzusammenstellung bei *E. Mettler*, Publ. sci. techn. Min. Air Paris 281 (1953), S. 77, wo das Schrifttum bis 1951 genannt ist.

[2] Die in diesem Abschnitt vorgebrachten Dinge stammen im wesentlichen aus einem Vortrag „Bericht über die Theorie der nichtlinearen Schwingungen elastischer Körper", den der Verf. auf der GAMM-Tagung 1952 in Braunschweig hielt und der damals nicht mehr veröffentlicht wurde.

Das Integralglied (2), das hier eine Deutung als Mittelwert gefunden hat, wurde schon von mehreren Autoren mit verschiedener Begründung eingeführt. Zuerst gab es *Kirchhoff*[1] bei seiner Berechnung der freien Schwingungen einer „schwach gespannten" Saite an. Die Gleichung dieses Problems erhält man aus (1) und (2) für $EJ = 0$ und $p = 0$. Ferner benutzen mehrere neuere Arbeiten[2] dasselbe Glied (2), von denen hier nur die Untersuchungen von *Schlesinger* und *Burgreen* hervorgehoben seien. Diese behandeln die freien Schwingungen der Saite bzw. des Stabes experimentell und bestätigen die von dem nichtlinearen Ausdruck (2) herrührende Amplitudenabhängigkeit der Eigenfrequenz durch Messung, was umgekehrt als Bestätigung der Brauchbarkeit der Näherung (2) aufgefaßt werden darf.

Von Bedeutung für die weitere Diskussion ist ferner der Fall der erzwungenen Schwingungen $p \neq 0$. Dieser ist bisher für die spezielle Querbelastung

$$p = p_0 \sin\frac{\pi x}{l} \cos\omega t$$

behandelt worden[3] und führt mit dem Ansatz

$$w = v(t) \sin\frac{\pi x}{l} \tag{3}$$

von (1), (2) auf die *Duffing*sche Gleichung

$$\ddot{v} + \omega_1^2 v (1 + \gamma v^2) = \beta \cos\omega t\,, \tag{4}$$

worin ω_1 die erste Biegeeigenfrequenz des Stabes, β und γ Konstante bedeuten. Von der Differentialgleichung (4) ist als wichtigstes Integral eine nicht harmonische periodische Lösung bekannt, deren Amplitude durch das charakteristische Amplituden-Frequenz-Diagramm nach Abb. 2 wiedergegeben wird. Auf den ausgezogenen Ästen ist die Lösung stabil, auf dem gestrichelten Ast instabil. Zwischen den stabilen Ästen finden die bekannten Kipperscheinungen statt.

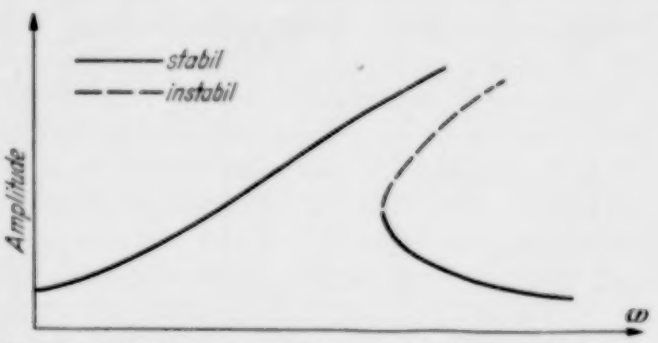

Abb. 2. Amplituden-Frequenz-Diagramm des einfachen nichtlinearen Schwingers und des querangeregten Stabes.

b) Längserregte Schwingungen. α) Die Differentialgleichung. In der vorliegenden Arbeit steht allerdings, wie in der Einleitung auseinandergesetzt, nicht der im vorhergehenden Abschnitt behandelte Fall zur Debatte, sondern der Stab mit pulsierender Längskraft, denn er zeigt die charakteristischen Instabilitäten. Um auf seine Gleichung zu kommen, liegt es nahe, auch hier die Gleichgewichtsaussage (1) heranzuziehen, darin aber $p = 0$ zu setzen und dafür die Bedingung $P = \text{const}$ aufzuheben, was natürlich nur möglich ist, wenn man ein Lager längsverschieblich macht. Setzen wir also wieder $S = P - \Delta P$ und jetzt $P = P_0 + P_1 \cos\omega t$, so kommt nach (1) und (2)

$$EJ w_{xxxx} + \left(P_0 + P_1 \cos\omega t - \frac{EF}{2l}\int_0^l w_x^2\, dx\right) w_{xx} + \mu w_{tt} = 0\,. \tag{5}$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung ist durch die bekannte — übrigens auch für (4) bestehende — Bedingung eingeschränkt, daß für die Längsschwingungen im Stab keine Resonanz entstehen darf, was erfüllt ist, wenn die Erregerfrequenz ω genügend tief unter der kleinsten Längseigenfrequenz liegt.

Führt man in (5) den Ansatz (3) ein,[4] so entsteht nach kurzer Rechnung mit den Abkürzungen

$$\omega_1^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{P_E - P_0}{\mu}, \qquad \varepsilon = \frac{P_1}{P_E - P_0}, \qquad P_E = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EJ,$$

$$\gamma = \frac{F}{4J}\,\frac{1}{1 - P_0/P_E} \quad \text{für den Stab}, \qquad \gamma = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{EF}{4P_0} \quad \text{für die Saite},$$

[1] *G. Kirchhoff*, Vorles. über Math. Physik (Mechanik), Leipzig 1876, S. 446.

[2] *K. Schlesinger*, Z. techn. Physik 12 (1931), S. 33; *G. F. Carrier*, Quart. appl. Math. 3 (1945), S. 157 und 7 (1949), S. 97; *S. Woinowsky-Krieger*, J. appl. Mech. 17 (1950), S. 35; *D. Burgreen*, J. appl. Mech. 18 (1951), S. 135.

[3] *E. Mettler*, Z. f. angew. Math. u. Mech. 31 (1951), S. 263. Die Rechnung ist dort für $P = 0$ durchgeführt, was aber völlig unwesentlich ist.

[4] Es genügt, wenn wir uns hier auf die Grundschwingung beschränken.

die beherrschende Differentialgleichung

$$\ddot{v} + \omega_1^2 v\,(1 - \varepsilon \cos \omega t + \gamma v^2) = 0\,, \tag{6}$$

deren Verwandtschaft mit (4) in die Augen fällt. Gleichung (6) wurde für den Stab auf einem anderen Wege von *Weidenhammer*[1] sorgfältig abgeleitet; seine Gleichung (33) stimmt mit (6) überein, wenn man die Dämpfung wegläßt. Dies zeigt erneut die Brauchbarkeit des Integralausdrucks (2) für die Längskraft, den wir daher später (Abschnitt **3**) ohne weitere Prüfung auch für ein anderes Problem verwenden wollen. Ferner hat *Raman*[2] die Beziehung (6) bei seinen Untersuchungen über die schwingende Saite mehrfach verwendet.

β) Ergebnisse der linearen Theorie. Wir diskutieren nun die Lösungen von (6) zunächst unter der Voraussetzung der gewöhnlichen Stabilitätstheorie, daß sehr kleine Ausschläge vorliegen und deshalb das nichtlineare Glied γv^2 weggelassen werden darf. Dann geht (6) in die *Mathieu*-Gleichung über, deren Lösung folgende Aussagen ergibt:

Für Wertepaare ω, ε, deren Bildpunkte in der (ω, ε)-Ebene außerhalb von gewissen Instabilitätsbereichen liegen, ist die gestreckte Stabform, oder, wie man auch sagen kann, die reine Längsschwingung stabil. Gibt man dem Stab eine anfängliche Biegeauslenkung, so schließen sich beschränkte Biegeschwingungen an, die von der in (6) nicht berücksichtigten, aber in Wirklichkeit stets vorhandenen Dämpfung zum Abklingen gebracht werden. Die Amplitude wird also Null.

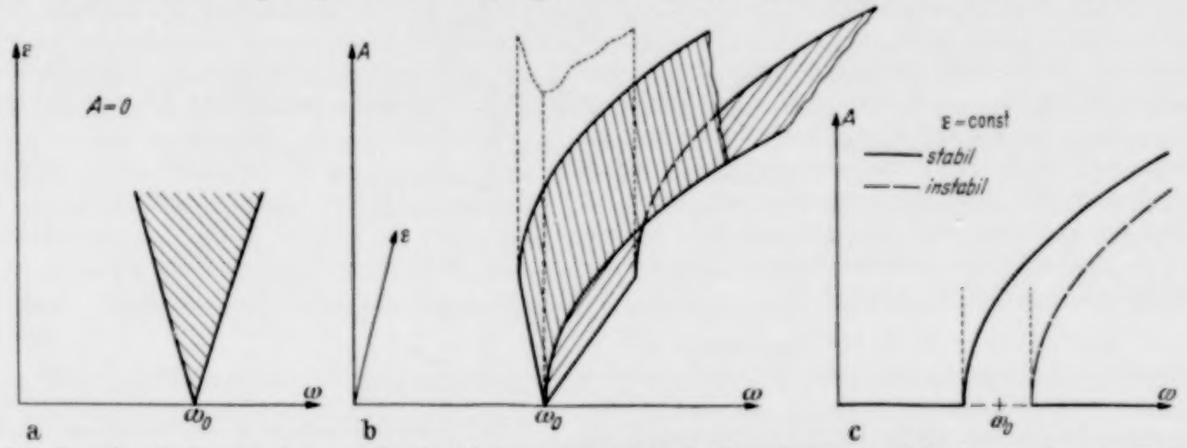

Abb. 3. Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Schwingungsamplitude A, der Erregerfrequenz ω und der dimensionslosen Amplitude ε der erregenden Kraft bei längsangeregten Biegeschwingungen und Kippschwingungen.
$\omega_0 = 2\,\omega_1$ für Instabilitätsbereich erster Art,
$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ für Instabilitätsbereich zweiter Art.

Für Punkte (ω, ε), die gerade auf der Grenzlinie eines Instabilitätsbereichs liegen, gibt es periodische Biegeschwingungen mit unbestimmt bleibender, endlicher Amplitude, die von der Dämpfung nicht beseitigt werden. Die Dämpfung bewirkt, sofern sie klein ist, lediglich eine unbedeutende Verlagerung der Grenzlinien. Die Lösungen von (6) sind jetzt die *Mathieu*-Funktionen.

Befindet man sich mit den Parametern ω, ε schließlich innerhalb eines Instabilitätsbereichs, so ist die gestreckte Stabform instabil und die entstehende Biegeschwingung hat keine endliche Amplitude, sondern zeigt anwachsende Tendenz.

Es handelt sich bei der *Mathieu*-Gleichung um sogenannte Instabilitätsbereiche erster Art. Zur Erörterung unsres grundsätzlichen Problems beschränken wir uns auf den ersten und größten Bereich. Auf seinen Grenzen haben die periodischen Lösungen die Frequenz $\omega/2$. Wir geben den Bereich wieder in Abb. 3, wo der eben erläuterte Zusammenhang zwischen ω, ε und der Amplitude A der Biegeschwingung bildlich dargestellt werden soll. Abb. 3a zeigt den Bereich in der üblichen Darstellung in der (ω, ε)-Ebene. Er hat eine Spitze im Punkt $\varepsilon = 0, \omega = \omega_0 = 2\,\omega_1$ und die Grenzen

$$\frac{\omega}{\omega_1} = 2 \pm \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \cdots. \tag{7}$$

Abb. 3b gibt eine räumliche Darstellung im (ω, ε, A)-System, u. zw. gehören die punktierten Linien zum linearen Fall. Da die Amplitude außerhalb des Bereichs Null ist, auf den Grenzen unbestimmt wird und innerhalb des Bereichs nicht existiert, kann man sie nur durch zwei lotrecht stehende Wandflächen darstellen, die sich über den Grenzkurven der (ω, ε)-Ebene ins Unendliche erstrecken und deshalb abgebrochen gezeichnet sind.

[1] *F. Weidenhammer*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 315.
[2] *C. V. Raman*, Phys. Rev. 35 (1912), S. 449 und Proc. Indian. Assoc. for the Cultivation of Sci. 6 (1912), S. 1 sowie 11 (1914), S. 43.

Abb. 3c zeigt einen Schnitt $\varepsilon = \text{const}$ durch das System Abb. 3b. In dem so entstehenden Amplituden-Frequenz-Diagramm stellen die beiden punktierten lotrechten Geraden und die ausgezogenen Teile der ω-Achse das vor, was man in der Schwingungslehre die „Resonanzkurve" oder auch den „Frequenzgang der Amplitude" oder englisch „response curve" nennt.

γ) Nichtlineare Biegeschwingungen. Nimmt man nun in (6) das nichtlineare Glied γv^2 mit, so bleibt natürlich die gestreckte Stabform im unveränderten Bereich instabil. Aber die Aussage über die Amplitude der Biegeschwingung ändert sich, und zwar derart, daß jeder Frequenz ω endliche, beobachtbare Amplitudenwerte zugeordnet werden, womit wir also der Antwort auf die in der Einleitung gestellten Frage näher kommen.

Es läßt sich streng zeigen[1], daß (6) auch für $\gamma \neq 0$ periodische Lösungen besitzt, und diese lassen sich durch Störungsrechnung bequem berechnen, wobei diese Rechnung dadurch eindeutig zu machen ist, daß man vorschreibt, die Lösung solle für $\gamma = 0$ in die entsprechende *Mathieu*-Funktion übergehen. Für den bisher besprochenen Instabilitätsbereich haben die periodischen Lösungen wiederum die Frequenz $\omega/2$, und zwischen ω, ε und der Amplitude A der Biegeschwingung ergibt sich die Beziehung

$$\frac{\omega}{\omega_1} = 2 \pm \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\gamma}{4} A^2 - \frac{\varepsilon^2}{32} \mp \frac{\gamma \varepsilon}{8} A^2 - \frac{15\gamma^2}{128} A^4 + \cdots . \tag{8}$$

Die Größe A ist allerdings nur eine Näherung für die wirkliche Amplitude[2], die ja bei einer nicht harmonischen Schwingung nicht unmittelbar anzugeben ist. Doch genügt es für unsre Zwecke völlig, A als Amplitude anzusehen.

Wenn wir nun die Beziehung (8) zwischen ω, ε und A geometrisch deuten, so finden wir zunächst, daß (8) für $\gamma = 0$ in (7) übergeht. Für $\gamma \neq 0$ wird also Gleichung (8) im Koordinatensystem der Abbb. 3b durch zwei (ausgezogen gezeichnete) Flächen dargestellt, die auf den alten Grenzlinien in der (ω, ε)-Ebene fußen, aber nicht mehr lotrecht aufsteigen, sondern nach rechts abbiegen. Die Wände des über dem Instabilitätsbereich stehenden Keiles neigen sich nach rechts derart, daß die linke Wand den Bereich wie ein Dach überdeckt. Besteht Instabilität der gestreckten Stabform [Punkt (ω, ε) im Instabilitätsbereich], so tritt eine Biegeschwingung der Frequenz $\omega/2$ ein, deren Amplitude durch die Höhe A der oberen Fläche über der (ω, ε)-Ebene gegeben ist. Steigert man nun ω soweit, daß der Punkt (ω, ε) die rechte Grenzlinie des Instabilitätsbereichs überschreitet, so bleibt die Biegeschwingung mit steigender Amplitude erhalten.

Sehr wichtig ist ferner, daß die Schwingung, die zu der unteren Fläche in Abb. 3b gehört, zwar theoretisch existiert, aber, wie die genauere Untersuchung zeigt, nicht stabil ist, also praktisch nicht auftritt. Die zur oberen Fläche gehörende Schwingung dagegen ist stabil.

Abb. 3c zeigt auch für den nichtlinearen Fall einen Schnitt $\varepsilon = \text{const}$ aus Abb. 3b und weist überzeugend auf die enge Verwandtschaft der Amplituden-Frequenz-Diagramme (Resonanzkurven) des quer- und des längsangeregten Stabes hin. Abb. 3c erscheint als ein eckiges Gegenstück von Abb. 2.

Die schwingende Saite ist das älteste und einzige[3] Objekt, an dem man bisher Versuche und Beobachtungen über längsangeregte Biegeschwingungen angestellt hat. Nach den klassischen Versuchen von *Melde*[4] haben sich hauptsächlich *Raman* und *Krishnaiyar*[5] mit diesen Saitenschwingungen beschäftigt. Der Verf. hatte ferner Gelegenheit, Versuche von *Uhde*[6] zu sehen, welche die Charakteristik der Abb. 3c deutlich zeigten, wobei sich lediglich gegenüber Abb. 3c eine erheblich größere Mannigfaltigkeit von Kurven ergab, da nicht nur die Grundschwingung der Saite in der Nähe des ersten Instabilitätsbereichs zu der besprochenen Erscheinung führen kann, sondern ebenso eine Oberschwingung in der Nähe eines höheren Instabilitätsbereichs. Die Versuche zeigen ferner, daß die Verwandtschaft zwischen der längsangeregten Saite und dem *Duffing*schen Schwinger noch weiter geht. So wie bei letzterem die Schwingung bei einer bestimmten maximalen Amplitude, die von der Dämpfung abhängt, abreißt und vom oberen auf den unteren Ast der Kurve Abb. 2 „kippt", liegen die Dinge auch bei der Saite. *Krishnaiyar* hat gezeigt, daß auch bei der Saite der Punkt

[1] Die folgenden mathematischen Ergebnisse stammen von *Weidenhammer* a. a. O.

[2] A ist der Koeffizient des ersten *Fourier*-Glieds der hier nicht wiedergegebenen Lösung.

[3] *I. Utida* und *K. Sezawa*, [Rep. Aeron. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ. 15 (1940), S. 193] haben zwar Versuche mit längsangeregten Stäben angestellt, doch lassen sich Versuchsbedingungen und Ergebnisse nicht in unseren Zusammenhang einordnen.

[4] *F. Melde*, Pogg. Ann. 109 (1860), S. 193 und 111 (1860), S. 513.

[5] *C. V. Raman*, a. a. O. und *N. C. Krishnaiyar*, Phys. Rev. 14 (1919), S. 490 sowie Phil. Mag. 43 (1922), S. 503.

[6] *A. Uhde*, Erregung von Seilschwingungen durch axiale Kräfte, Diplomarbeit Techn. Hochschule Braunschweig (Wöhlerinstitut) 1948.

des Abreißens von der Dämpfung bestimmt wird. Es ist nicht daran zu zweifeln, daß sich Stäbe mit pulsierender Axiallast ähnlich verhalten.

3. Kippschwingungen des I-Trägers. a) Die Differentialgleichungen. Nachdem im vorhergehenden Abschnitt ausschließlich Instabilitäten erster Art behandelt worden sind, wird jetzt die Frage aufgeworfen, wie sich eine elastische Schwingung in der Nähe einer Instabilität zweiter Art verhält. Als konkretes mechanisches Problem, das am kürzesten zu einer solchen Instabilität führt, wählen wir den I-Träger in Gabellagerung mit Axiallast S und pulsierenden Endmomenten $M = M_1 \cos \omega t$ nach Abb. 4. Bezeichnen wir mit

$w(x, t)$ die waagerechte Verschiebungskomponente der Stabachse,
$\vartheta(x, t)$ den Verdrehwinkel des Querschnitts,
EJ die Biegesteifigkeit des ganzen Querschnitts bei Biegung um die y-Achse (Lotlinie),
EJ_F die Biegesteifigkeit eines Flansches bei Biegung um die y-Achse,
GJ_d die Torsionssteifigkeit,
a die Querschnittshöhe,
i_p den polaren Trägheitsradius des Querschnitts,
μ die Massenbelegung des Stabes,

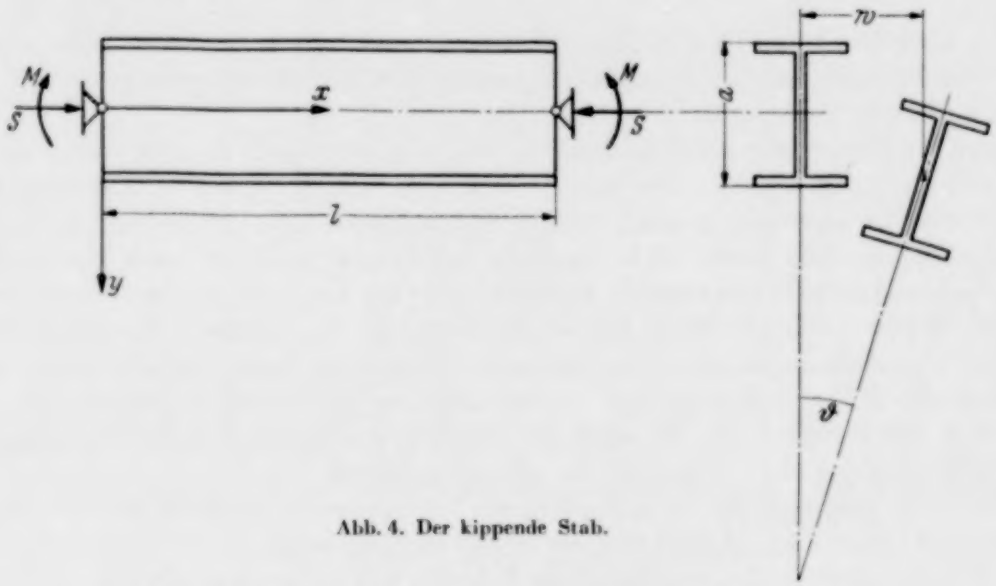

Abb. 4. Der kippende Stab.

so gehorcht die Bewegung des Stabes den Differentialgleichungen[1]

$$\left.\begin{aligned} EJ\, w_{xxxx} + S\, w_{xx} - M\, \vartheta_{xx} + \mu\, w_{tt} &= 0\,, \\ EJ_F \frac{a^2}{2}\, \vartheta_{xxxx} - GJ_d\, \vartheta_{xx} - M\, w_{xx} + \mu\, i_p^2\, \vartheta_{tt} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

mit den Randbedingungen

$$w = \vartheta = w_{xx} = \vartheta_{xx} = 0 \qquad \text{für} \quad x = 0 \qquad \text{und} \qquad x = l\,.$$

Dazu tritt noch eine Gleichung für die Bewegung in der lotrechten Lastebene, die von (9) unabhängig ist und hier nicht interessiert. Voraussetzung für die Gültigkeit von (9) ist, daß die Erregerfrequenz ω wesentlich unter der kleinsten Eigenfrequenz der Biegeschwingung in y-Richtung liegt[2].

Wir wollen ferner voraussetzen, daß die Längskraft S keinen eingeprägten Lastanteil hat, sondern erst durch die Verlängerung der Stabachse infolge der Ausbiegung w bei festgehaltenen Enden entsteht. Dabei wird man annehmen dürfen, daß die Längskraft lediglich mit w zusammenhängt, nicht aber mit der lotrechten erzwungenen Schwingung, die durch die große Biegesteifigkeit des Profils klein gehalten wird. Somit wird man die Kraft wie im vorhergehenden Abschnitt ge-

[1] Eine Ableitung dieser Gleichungen aus den Gleichgewichtsbedingungen am Stabelement gibt *S. Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 197, ferner *K. A. Reckling*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 137.

[2] Diese Bedingung ist identisch mit der Forderung, daß das Biegemoment, welches von den eingeprägten Endmomenten M im Stab hervorgerufen wird, unabhängig von x und gleich M ist. Die Bedingung kann, da wir sogleich [Gleichung (13)] die Erregerfrequenz in einen ganz bestimmten Bereich verlegen, in vielen Fällen nur unvollkommen erfüllt werden. Wie man auch dann, und sogar bei allgemeinerer Belastung und Lagerung als der hier angenommenen, die Form der Gleichung (9) retten kann, erörtert *Reckling* a. a. O.

nähert aus dem bewährten Ausdruck für die mittlere Dehnung ableiten und

$$S = -\frac{E F}{2 l} \int_0^l w_x^2 \, dx \tag{10}$$

in (9) einsetzen. Machen wir ferner den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} w &= v_1(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \\ \vartheta &= \frac{v_2(t)}{i_p} \sin \frac{\pi x}{l}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

der die Randbedingungen erfüllt, so kommt aus (9) und (10) nach kurzer Rechnung das System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Zeitfunktionen v_1 und v_2

$$\left.\begin{aligned} \ddot{v}_1 + \omega_1^2 v_1 + \varepsilon \omega_1 \omega_2 v_2 \cos \omega t + \gamma \omega_1^2 v_1^3 &= 0, \\ \ddot{v}_2 + \omega_2^2 v_2 + \varepsilon \omega_1 \omega_2 v_1 \cos \omega t &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

worin

$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{E J}{\mu}}$ die tiefste Biegeeigenfrequenz,

$\omega_2 = \frac{\pi}{l i_p} \sqrt{\frac{G J_d + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E J_F \frac{a^2}{2}}{\mu}}$ die tiefste Torsions- Eigenfrequenz bedeutet und

$\varepsilon = \frac{M_1}{M_{Kipp}}$ mit $M_{Kipp} = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \omega_1 \omega_2 \mu \, i_p$ [statisches Kippmoment, aus (12) durch $\ddot{v}_1 = \ddot{v}_2 = 0$ sofort zu gewinnen],

$\gamma = \frac{F}{4 J}$

gesetzt ist.

b) Ergebnisse der linearen Theorie. Läßt man in (12) das Glied mit γ weg, so entsteht ein lineares Gleichungsystem, für das die Eigenschaften der Lösungen eingehend erforscht sind[1]. Im Gegensatz zur einfachen *Mathieu*-Gleichung kommen jetzt Instabilitäten zweiter Art vor, auf die wir unser besonderes Augenmerk richten wollen. Wir beschränken uns dabei wie schon oben auf die Diskussion der bedeutsamsten Instabilität, die jetzt dann eintritt, wenn die Erregerfrequenz in die Nähe des Wertes

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \tag{13}$$

kommt. Um später den Einfluß des nichtlinearen Gliedes berücksichtigen zu können, müssen wir hier kurz wiederholen, wie sich das Stabilitätsverhalten des Systems mathematisch ausdrückt.

Nach der bekannten *Floquet*schen Theorie hat (12) ein Fundamentalsystem von Lösungen der Form

$$v_f = \left\{\begin{aligned} V_{fr} &= e^{\varrho_r s} \varphi_{fr}(s), \\ V_{fr}^* &= e^{-\varrho_r s} \varphi_{fr}(-s), \end{aligned}\right\} \quad (f, r = 1, 2) \tag{14}$$

worin wie üblich

$$s = \omega t \tag{15}$$

gesetzt ist und ϱ_r die charakteristischen Exponenten, φ_{fr} periodische Funktionen der Periode 2π bedeuten. Zunächst soll (14) etwas umgeformt werden. Dazu führen wir φ_{fr} als komplexe *Fourier*-Reihe

$$\varphi_{fr} = \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} c_{fr\eta} e^{i \eta s}$$

ein, setzen

$$\varrho_r = i h_r$$

und nehmen eine Vereinigung der in (14) untereinanderstehenden Partikularlösungen mittels zweier Integrationskonstanten ψ_1 und ψ_2 vor, indem wir

$$v_{fr} = \frac{1}{2} (V_{fr} + V_{fr}^*) \cos \psi_r + \frac{i}{2} (V_{fr} - V_{fr}^*) \sin \psi_r$$

[1] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 418.

bilden. So entsteht ein System von vier Partikularlösungen

$$v_{fr} = \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} c_{fr\eta} \cos\left[(h_r + \eta)\, s + \psi_r\right] \qquad (f, r = 1, 2)\,, \tag{16}$$

die im allgemeinen linear unabhängig sind.

Die Stabilitätsfrage beantwortet man nun wieder am besten an Hand des zugehörigen Instabilitätsbereiches (zweiter Art) in der (ω, ε)-Ebene. Abb. 3a paßt auf ihn ohne Änderung, wenn man dort den Wert (13) für ω_0 nimmt. Die Grenzlinien haben, wie man mit den bekannten Methoden der linearen Stabilitätstheorie ausrechnet, die Gleichungen

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\omega_1 \omega_2} + \frac{\varepsilon^2}{32}\omega_1\left(3 + 4\,\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) + \cdots. \tag{17}$$

Liegt der Punkt (ω, ε) außerhalb des Bereichs, so sind h_1 und h_2 reell, und die Funktionen (16) werden durch reelle cos-Reihen gebildet, bleiben also beschränkt. Dasselbe gilt dann für die Kippschwingungen des Stabes, woraus folgt, daß die erzwungene lotrechte Biegeschwingung stabil ist. Liegt der Punkt (ω, ε) dagegen innerhalb des Bereichs, so werden h_1 und h_2 komplex, so daß die cos-Funktionen in (16) Faktoren der Form $e^{\sigma_r s}$ mit $\sigma_r > 0$ abspalten, was offensichtlich Instabilität bedeutet. Wenn der Punkt (ω, ε) schließlich auf eine Grenzlinie des Bereichs fällt, bleibt die allgemeine Form der Lösungen (16) erhalten, aber es wird $h_1 = h_2$, so daß die Funktionen (16) nicht mehr linear unabhängig sind. Zur Vervollständigung des Fundamentalsystems treten jetzt andere Lösungen hinzu, die aber hier nicht interessieren. Die Funktionen (16) wollen wir in diesem Sonderfall „Grenzfunktionen" nennen. Sie entsprechen den *Mathieu*-Funktionen, welche die lineare Gleichung (6) „auf den Grenzen" lösen. Die besondere Bedeutung der Grenzfunktionen ist nicht so augenfällig wie die der *Mathieu*-Funktionen, die sich durch ihre Periodizität vor allen andern Lösungen auszeichnen und deshalb den zwanglosen Ausgangspunkt für eine Integration der nichtlinearen Gleichung (6) bilden. Wir müssen aber genau so die Integration der nichtlinearen Gleichungen (12) an die Grenzfunktionen anschließen, deren Bedeutung durch folgende Überlegung klar wird.

Wenn man die Wirkung einer beliebig kleinen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung berücksichtigt[1], so stellt man zunächst fest, daß sich die Grenzlinien des Instabilitätsbereichs entsprechend wenig verschieben. Im Fall der Stabilität, d. h. außerhalb des Bereichs, bringt die Dämpfung die Kippschwingungen zum Abklingen, so daß nur die stabile erzwungene Biegeschwingung übrigbleibt. Innerhalb des Bereichs besteht nach wie vor Aufschaukelung der Kippschwingungen, also Instabilität. Auf den Grenzen aber läßt auch die Dämpfung eine beschränkte, weder auf- noch abklingende Kippschwingung bestehen. Diese zwischen Abklingen und Aufschaukelung stehende, in einem erweiterten Sinne stationäre Bewegung wird durch die — ohne Berücksichtigung der Dämpfung definierten — Grenzfunktionen gut wiedergegeben, und zwar gut aus Stetigkeitsgründen, weil man ja in praktischen Fällen stets mit kleiner Dämpfung zu rechnen hat.

Wenn wir nun an die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (12) gehen, wobei die umständlich zu berücksichtigende Dämpfung nach wie vor weggelassen sei, so kann es sich dabei nur um eine bestimmte Aufgabe handeln, nämlich die Fortsetzung der Grenzfunktionen $v_{fr}(s)$ im nichtlinearen Gebiet $\gamma \neq 0$. In Formeln: die Lösungen $v_f = v_f(s, \gamma)$ von (12), die wir suchen, müssen die Bedingung

$$v_f(s, 0) = v_{fr}(s) \tag{18}$$

erfüllen. Etwas anschaulicher läßt sich die Situation und die Aufgabe an dem Amplituden-Frequenz-Diagramm der Bewegung erklären. Wir bezeichnen wieder mit A die „Amplitude" der Kippschwingung, wobei unter dieser Größe, die ja bei einer nicht periodischen, räumlichen Bewegung erst definiert werden müßte, vorerst irgend ein Maß für den größten Ausschlag aus der Ruhelage verstanden sei. Dann läßt sich das genannte Diagramm im linearen Fall, wo die Grenzfunktionen nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, durch die lotrechten punktierten Linien der Abb. 3c darstellen. Aber die lineare Theorie gilt genau genommen nur für unendlich kleine Amplituden, d. h. sie kann von der Amplitudenkurve $A(\omega)$ nur Anfangspunkte und die Ausgangsrichtung auf der ω-Achse, zusammen also Linienelemente, liefern. Die nichtlineare Theorie muß diejenigen Kurven $A(\omega)$ errechnen, die an diese Linienelemente anschließen (Abb. 5).

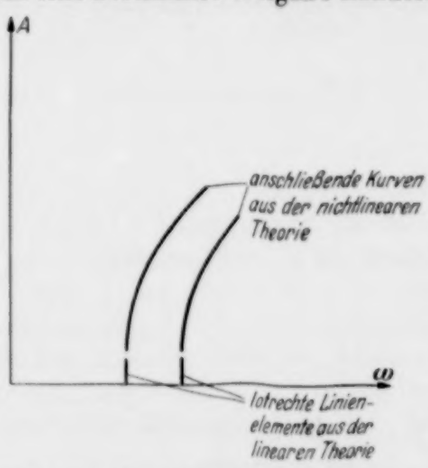

Abb. 5. Zum Verhältnis der linearen zur nichtlinearen Theorie.

[1] *G. Grammel*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 170.

c) **Berechnung der nichtlinearen Kippschwingungen.** Zur Durchführung bedienen wir uns der Störungsrechnung[1], und zwar in möglichst engem Anschluß an die Bezeichnungen der allgemeinen linearen Stabilitätstheorie[2]. Dort wurde

$$q = \frac{\omega}{\omega_0}, \qquad q_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}, \qquad q_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}, \qquad \bar{q} = h_r \dot{q}' \tag{19}$$

gesetzt, woraus wegen (13)

$$q_1 + q_2 = 1$$

folgt. Wir führen ferner neben der unabhängigen Variabeln s eine zweite

$$\bar{s} = \bar{q}\,\omega_0 t + \psi \ ^3 \tag{20}$$

ein. Dann stehen in den Reihen (16) die Funktionen $\cos(\bar{s} + \eta s)$. Wir suchen daher die Lösungen v_f des nichtlinearen Systems (12) in der etwas erweiterten Form

$$v_f = \sum_{m,n} A_{mn} \cos(m s + n \bar{s})$$

zu berechnen, was den geforderten Übergang (18) ermöglichen wird. Setzen wir (15), (19), (20), in (12) ein, so folgt nach kurzer Rechnung

$$\left.\begin{aligned} q^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2} + 2\,q\,\bar{q}\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial s\,\partial \bar{s}} + \bar{q}^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \bar{s}^2} + q_1^2 v_1 + \varepsilon\, q_1 q_2 v_2 \cos s + \gamma\, q_1^2 v_1^3 &= 0\,, \\ q^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial s^2} + 2\,q\,\bar{q}\,\frac{\partial^2 v_2}{\partial s\,\partial \bar{s}} + \bar{q}^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial \bar{s}^2} + q_2^2 v_2 + \varepsilon\, q_1 q_2 v_1 \cos s &= 0\,. \end{aligned}\right| \tag{21}$$

Die lineare Stabilitätstheorie ($\gamma = 0$) setzt nun v_f, q und $\bar{q}$ als Potenzreihen von ε an. Wir suchen im folgenden entsprechende Potenzreihen von ε und γ, führen aber zur formalen Abkürzung der Rechnung den Kunstgriff ein, von γ zunächst den Faktor ε abzuspalten und alle Größen nach Potenzen von ε allein zu entwickeln. Die verlangten Potenzen von γ kommen dabei, wie sich sogleich zeigen wird, von selbst heraus. Ferner spalten wir von den Lösungen v_f einen Faktor A ab, unter dem wir den Koeffizienten des Gliedes $\cos \bar{s}$ in der Funktion v_1 verstehen wollen. Alles in allem setzen wir somit

$$\left.\begin{aligned} v_f &= A\,(v_f^{(0)} + \varepsilon\, v_f^{(1)} + \varepsilon^2 v_f^{(2)} + \cdots) \quad (f = 1, 2)\,, \\ q &= 1 + \varepsilon\, q^{(1)} + \varepsilon^2 q^{(2)} + \cdots, \\ \bar{q} &= q_1 + \varepsilon\, \bar{q}^{(1)} + \varepsilon^2 \bar{q}^{(2)} + \cdots, \end{aligned}\right| \tag{22}$$

und außerdem

$$\gamma\, A^2 = \varepsilon\, \Gamma. \tag{23}$$

Führt man (22) und (23) in (21) ein und benutzt die Abkürzung

$$D(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + 2\,q_1 \frac{\partial^2 v}{\partial s\,\partial \bar{s}} + q_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{s}^2}\,,$$

so kommt rasch durch Vergleich der Potenzen von ε die Folge von Differentialgleichungen für die $v_f^{(j)}$

$$D(v_f^{(0)}) + q_f^2 v_f^{(0)} = 0 \qquad (f = 1, 2)\,, \tag{24.0}$$

$$\left.\begin{aligned} D(v_f^{(1)}) + q_f^2 v_f^{(1)} + 2\,q^{(1)} \frac{\partial^2 v_f^{(0)}}{\partial s^2} + 2\,(\bar{q}^{(1)} + q_1 q^{(1)}) \frac{\partial^2 v_f^{(0)}}{\partial s\,\partial \bar{s}} + 2\,q_1 \bar{q}^{(1)} \frac{\partial^2 v_f^{(0)}}{\partial \bar{s}^2} \\ = \begin{cases} -q_1 q_2 v_2^{(0)} \cos s - q_1^2 \Gamma v_1^{(0)^3} & \text{für } f = 1 \\ -q_1 q_2 v_1^{(0)} \cos s & \text{für } f = 2\,, \end{cases} \end{aligned}\right| \tag{24.1}$$

$$\left.\begin{aligned} D(v_f^{(2)}) + q_f^2 v_f^{(2)} + (2\,q^{(2)} + q^{(1)_2}) \frac{\partial^2 v_f^{(0)}}{\partial s^2} + 2\,(\bar{q}^{(2)} + q_1 q^{(2)} + q^{(1)} \bar{q}^{(1)}) \frac{\partial^2 v_f^{(0)}}{\partial s\,\partial \bar{s}} \\ + (2\,q_1 \bar{q}^{(2)} + \bar{q}^{(1)_2}) \frac{\partial^2 v_f^{(0)}}{\partial \bar{s}^2} + 2\,q^{(1)} \frac{\partial^2 v_f^{(1)}}{\partial s^2} + 2\,(\bar{q}^{(1)} + q_1 q^{(1)}) \frac{\partial^2 v_f^{(1)}}{\partial s\,\partial \bar{s}} + 2\,q_1 \bar{q}^{(1)} \frac{\partial^2 v_f^{(1)}}{\partial \bar{s}^2} \\ = \begin{cases} -q_1 q_2 v_2^{(1)} \cos s - 3\,q_1^2 \Gamma v_1^{(0)^2} v_1^{(1)} & \text{für } f = 1 \\ -q_1 q_2 v_1^{(1)} \cos s & \text{für } f = 2\,, \end{cases} \end{aligned}\right| \tag{24.2}$$

---

[1] *A. Lindstedt*, C. R. 47 (1883), S. 1276 und 1353. *C. H. Müller* u. *G. Prange*, Allgemeine Mechanik, Hannover 1923, S. 311 ff.

[2] S. Fußnote 1 von S. 359.

[3] Der Index r an ψ_r hat keine Bedeutung mehr und wird weggelassen.

usw. Die Lösung von (24.0) ist

$$\left.\begin{aligned} v_1^{(0)} &= \cos s\,, \\ v_2^{(0)} &= c^{(0)} \cos(s - \bar{s})\,, \end{aligned}\right\} \tag{25.0}$$

worin $c^{(0)}$ eine Integrationskonstante bedeutet, während $\cos \bar{s}$ verabredungsgemäß den Faktor Eins hat. Die Funktionen (25.0) müssen in die Differentialgleichungen (24.1) eingesetzt werden. Eine Lösung von (24.1) ohne Säkularglieder ist dann nur möglich, wenn die kritischen Glieder mit $\cos \bar{s}$ in der ersten bzw. $\cos(s - \bar{s})$ in der zweiten Gleichung (24.1) zum Verschwinden gebracht werden. Dieser Gedankengang führt nach einer elementaren Rechnung auf die „Hauptgleichungen"

$$\left.\begin{aligned} 2\,q_1\,\bar{q}^{(1)} - \frac{q_1 q_2}{2}\,c^{(0)} - \frac{3\,q_1^2\,\Gamma}{4} &= 0\,, \\ 2\,q_2\,(q^{(1)} - \bar{q}^{(1)})\,c^{(0)} - \frac{q_1 q_2}{2} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{26.1}$$

und die Lösungen von (24. 1)

$$\left.\begin{aligned} v_1^{(1)} &= \frac{q_1}{8}\,c^{(0)} \cos(2\,s - \bar{s}) + \frac{\Gamma}{32} \cos 3\,\bar{s}\,, \\ v_2^{(1)} &= \frac{q_2}{8} \cos(s + \bar{s}) + c^{(1)} \cos(s - \bar{s}) \end{aligned}\right\} \tag{25.1}$$

mit einer neuen Integrationskonstanten $c^{(1)}$. Eine solche Konstante kann nur in der Funktion $v_2^{(1)}$ auftreten, nicht aber in $v_1^{(1)}$, da hier gemäß unserer Verabredung über den Faktor A kein Glied $\cos \bar{s}$ mehr vorkommen darf. Weiterhin liefert Einsetzen von (25.1) in (24.2) und Herausheben der kritischen Glieder die Hauptgleichungen

$$\left.\begin{aligned} 2\,q_1\,\bar{q}^{(2)} + \bar{q}^{(1)2} - \frac{q_1 q_2^2}{16} - \frac{q_1 q_2}{2}\,c^{(1)} - \frac{3}{128}\,q_1^2\,\Gamma^2 &= 0\,, \\ [2\,q_2\,(q^{(2)} - \bar{q}^{(2)}) + (q^{(1)} - \bar{q}^{(1)})^2]\,c^{(0)} + 2\,q_2\,(q^{(1)} - \bar{q}^{(1)})\,c^{(1)} - \frac{q_1^2 q_2}{16}\,c^{(0)} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{26.2}$$

Die Lösung von (24.2) wollen wir schon nicht mehr anschreiben. Der Fortgang der Rechnung ist ja ohne weiteres zu übersehen.

Die Hauptgleichungen (26. j) sind Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten $\bar{q}^{(j)}$ und $q^{(j)}$ ($j = 1, 2, \ldots$); ihre sukzessive Auflösung ergibt

$$\left.\begin{aligned} \bar{q}^{(1)} &= \frac{q_2}{4}\,c^{(0)} + \frac{3}{8}\,q_1\,\Gamma, \\ q^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(\frac{q_1}{c^{(0)}} + q_2\,c^{(0)}\right) + \frac{3}{8}\,q_1\,\Gamma, \end{aligned}\right\} \tag{27.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{q}^{(2)} &= \frac{q_2}{4}\,c^{(1)} - \frac{q_2^2}{32\,q_1}\,c^{(0)2} - \frac{3}{32}\,q_2\,\Gamma\,c^{(0)} + \frac{q_2^2}{32} - \frac{15}{256}\,q_1\,\Gamma^2, \\ q^{(2)} &= \frac{c^{(1)}}{4}\left(q_2 - \frac{q_1}{c^{(0)2}}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{q_1^2}{c^{(0)2}} + \frac{q_2^2}{2\,q_1}\,c^{(0)2}\right) - \frac{3}{32}\,q_2\,\Gamma\,c^{(0)} + \frac{1}{32}\,(q_1^2 + q_2^2) - \frac{15}{256}\,q_1\,\Gamma^2 \end{aligned}\right\} \tag{27.2}$$

usw. Offensichtlich liegt nun in den Ergebnissen (25.0), (25.1), (27.1), (27.2) usw. insofern eine Unbestimmtheit, als die Integrationskonstanten $c^{(0)}$, $c^{(1)}$ usw. zunächst frei geblieben sind. Diese Lücke wird aber zwangsläufig dadurch geschlossen, daß wir für die berechneten Reihen (22) den Anschluß (18) an die Grenzfunktionen verlangen. Setzt man in (27. j) $\Gamma = 0$, so stehen dort genau die Ergebnisse der linearen Stabilitätstheorie. Diese Theorie legt die Konstanten $c^{(j)}$ durch die Vorschrift

$$\frac{\partial q^{(j)}}{\partial c^{(0)}} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{28}$$

fest, und dieselbe Vorschrift müssen wir daher auf die Ausdrücke (27. j) anwenden. Die Gleichungen (28) sind Bestimmungsgleichungen für $c^{(0)}$, $c^{(1)}, \ldots$; ihren Wurzeln geben wir wie in der linearen Stabilitätstheorie den Index G. Das Ergebnis der Auflösung von (28) ist dann

$$\left.\begin{aligned} c_G^{(0)} &= \pm\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}\,, \\ c_G^{(1)} &= \frac{1}{8}\,(1 - 2\,q_1) \pm \frac{3}{16}\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}\,\Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Schließlich hat man (29) in (25.0), (25.1), (27.1) und (27.2) einzusetzen und erhält, wenn man zugleich (22) und (23) berücksichtigt, als endgültiges Resultat die Anfangsglieder der gesuchten Lösungen

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= A\cos\bar{s} \pm \varepsilon A\frac{q_1}{8}\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}\cos(2s-\bar{s}) + \frac{\gamma A^3}{32}\cos 3\bar{s} + \cdots, \\ v_2 &= \pm A\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}\cos(s-\bar{s}) + \frac{\varepsilon A}{8}\left[q_2\cos(s+\bar{s}) + (1-2q_1)\cos(s-\bar{s})\right] \\ &\quad \pm \frac{3}{16}\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}\gamma A^3\cos(s-\bar{s}) + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$$q = \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \pm \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{q_1 q_2} + \frac{3\gamma}{8}q_1 A^2 + \frac{\varepsilon^2}{32}q_1(3+4q_1) - \frac{15}{256}\gamma^2 q_1 A^4 \mp \frac{3\gamma\varepsilon}{32}\sqrt{q_1 q_2}\,A^2 + \cdots, \tag{31}$$

$$\bar{q} = q_1 \pm \frac{\varepsilon}{4}\sqrt{q_1 q_2} + \frac{3\gamma}{8}q_1 A^2 + \frac{\varepsilon^2}{32}q_2(q_2-2q_1) - \frac{15}{256}\gamma^2 q_1 A^4 \mp \frac{3\gamma\varepsilon}{32}\sqrt{q_1 q_2}\,A^2 + \cdots. \tag{32}$$

d) **Deutung der Ergebnisse.** Die Gleichungen (30) geben die Kippschwingungen des Stabes in ihrem zeitlichen Verlauf wieder. Dabei ist A als Koeffizient des ersten Gliedes von v_1 eine Näherung für die Amplitude der Biegung in w-Richtung, ebenso wie $A\sqrt{q_1/q_2}$ die Amplitude des Torsionswinkels ϑ näherungsweise angibt. Genau genommen sind die Maximalausschläge von w und ϑ gewisse Funktionen von A; wir nennen jedoch A weiterhin vereinfachend die Amplitude. Am wichtigsten für die Diskussion der Bewegung ist nun die Beziehung (31) zwischen ω, ε und A. Sie entspricht in ihrem Aufbau ganz der schon ausführlich gedeuteten Gleichung (8), so daß wir auch die an (8) angeschlossene geometrische Darstellung in den Abb. 3a bis c übernehmen und auf ihre schon ausgeführte Diskussion verweisen können. Das völlige Entsprechen der Frequenz-Amplituden-Beziehung beim Instabilitätsbereich erster Art und zweiter Art läßt es ferner als nahezu sicher erscheinen, daß wie im ersten so auch im zweiten Fall die links gelegene Fläche in Abb. 3b zu stabilen, die rechts gelegene zu instabilen Bewegungen gehört. Allerdings bleibt dies noch nachzuweisen. Doch muß der Beweis auf eine spätere Untersuchung verschoben werden.

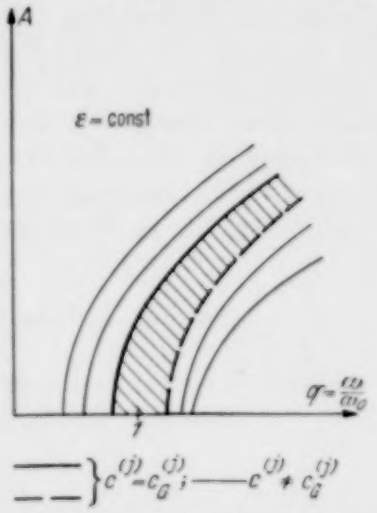

Abb. 6. Schematische Darstellung der Amplituden-Frequenz-Beziehung bei Variation der Integrationskonstanten $c^{(0)}$ und $c^{(1)}$.

Stattdessen sei eine ergänzende Bemerkung angefügt. Die zunächst etwas unanschauliche Bedingung (28) gewinnt man in der linearen Stabilitätstheorie aus der Abgrenzung zwischen den stabilen und den instabilen Gebieten in der (ω, ε)-Ebene. Im nichtlinearen Fall läßt (28) in der Darstellung des (ω, A)-Diagramms eine andere wichtige Deutung zu, wobei wir der Kürze halber lediglich den quadratischen Ausdruck

$$q = 1 + \varepsilon q^{(1)} + \varepsilon q^{(2)}$$

zugrunde legen wollen. Nach (27.1) und (27.2) ist q eine Funktion von $c^{(0)}$ und $c^{(1)}$. Für $c^{(0)} = c_G^{(0)}$, $c^{(1)} = c_G^{(1)}$ wird nach (28) $\partial q/\partial c^{(0)} = 0$. Außerdem ist, wie man aus (27.2) sofort sieht, $\partial q/\partial c^{(1)} = 0$. Das bedeutet, daß q für $c^{(0)} = c_G^{(0)}$, $c^{(1)} = c_G^{(1)}$ einen stationären Wert annimmt. Untersucht man dessen Charakter näher, so stellt man fest, daß auf der linken (rechten) Kurve von Abb. 3c, zu der die unteren (oberen) Vorzeichen in (29) gehören, wegen $\partial^2 q/\partial c^{(0)2} < 0\ (>0)$, $\partial^2 q/\partial c^{(1)2} = 0$ ein Maximum (Minimum) von q vorliegt. Dies ist in dem Sinne zu verstehen, daß q bei konstantem A und ε entweder konstant bleibt, nämlich dann, wenn $c^{(0)} = c_G^{(0)}$ bleibt und $c^{(1)}$ sich allein ändert, oder kleiner (größer) wird, nämlich bei Änderung von $c^{(0)}$. Dieses Ergebnis ist in Abb. 6, einer Wiederholung von Abb. 3c, dargestellt und läßt sich folgendermaßen aussprechen: Die Schar von Amplituden-Frequenz-Kurven, die man aus (27.1), (27.2) bei Variation der Integrationskonstanten $c^{(0)}$ und $c^{(1)}$ bekommt, hat zwei durch die Bedingung (18) bzw. (28) ausgesonderte Grenzkurven (31), in deren (in Abb. 6 schraffierten) Zwischenraum keine Kurven fallen. Man kann auch sagen, daß auf dem linken (stabilen) Ast die Amplitude bei fester Erregerfrequenz ω ein Minimum hat.

Nach der Einleitung besteht eine Aufgabe dieser Arbeit in der Schilderung der sichtbaren Erscheinung der berechneten nichtlinearen Schwingungen. Die nun ausführlich diskutierte Amplitude ist ein Teil dieser Erscheinung, Das Bild wird vervollständigt durch eine Feststellung, die wohl das Merkwürdigste an dem Verlauf der Kippschwingungen darstellt. Wir beschränken uns dabei

bewußt auf das grob sichtbare Phänomen ohne numerische Feinheiten. Auf dieses stößt man bei der Überlegung, daß ε praktisch stets eine sehr kleine Zahl sein wird und daß auch der zweite Parameter, dessen Potenzen in den Reihen (30) bis (32) stehen, nämlich γA^2, aus Konvergenzgründen klein sein muß. Übrigens ist $\gamma A^2 = (A/2\, i_w)^2$, wenn man mit i_w den Trägheitsradius des Querschnitts in der Waagerechten bezeichnet, woraus folgt, daß die Amplitude höchstens die Größenordnung des Trägheitsradius haben darf. Wenn wir nun aus jeder der Reihen (30) bis (32) das numerisch überwiegende, nämlich das erste Glied nehmen, kommen wir zu folgender Aussage. Die Erregerfrequenz ω liegt bei oder besser gesagt etwas über der Schwebungsfrequenz $\omega_1 + \omega_2$. Die Variable $\bar{s}$ geht nach (20) und (32) in $\omega_1 t + \psi$, die Variable $s - \bar{s}$ nach (15) und (13) in $\omega_2 t - \psi$ über. Somit kann man in der Gesamtbewegung drei Komponenten unterscheiden. Die Biegeschwingung in der Lotrechten, die hier die Rolle der erzwungenen Grundbewegung spielt, verläuft mit der Frequenz $\omega_1 + \omega_2$ des erregenden Moments. Als Nachbarbewegung kommt hinzu einmal die Biegeschwingung in der Waagerechten (wiedergegeben durch v_1) im Takt der zugehörigen Biege-Eigenfrequenz ω_1 und daneben die Torsionsschwingung (bestimmt durch v_2), die entsprechend mit der Torsions-Eigenfrequenz ω_2 verläuft. Da die drei Frequenzen $\omega_1 + \omega_2$, ω_1 und ω_2 im allgemeinen nicht kommensurabel sind, ruft somit das harmonische Erregermoment eine im ganzen nicht periodische Bewegung des elastischen Körpers hervor.

Das ist ein Ergebnis, das der klassischen Elastokinetik völlig fremd ist. Es ist nicht nur theoretisch von Bedeutung, sondern auch für den Praktiker von Interesse. Man denke etwa daran, daß man in der Technik häufig Schwingungsmessungen an Tragwerken ausführt und aus den festgestellten Befunden auf die erregenden Kräfte Rückschlüsse zieht. Dabei arbeitet man wohl stets mit dem Grundsatz der klassischen Schwingungslehre, daß erregende Kraft und erzwungene Schwingung dieselbe Frequenz haben. Würde man auf dieser Grundlage eine Balkenschwingung der oben diskutierten Art untersuchen, so müßte man auf Erregerkräfte der Frequenzen ω_1 und ω_2 schließen, die in Wirklichkeit gar nicht vorhanden sind.

Aus dem Institut für Mechanische Schwingungstechnik der Techn. Hochschule Karlsruhe.

(Eingegangen am 1. Dezember 1954.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *E. Mettler*, Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12.

Über eine mögliche Verbesserung der *Ritz*schen Methode

Von **Th. Pöschl**

1. Einleitung. Bei der *Ritz*schen Methode zur Lösung von Randwertaufgaben von Differentialgleichungen wird eine Folge von Näherungsfunktionen $w_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ ausgewählt, die einzeln die Randbedingungen erfüllen, aber nicht der gegebenen Differentialgleichung genügen. Diese werden mit zunächst unbekannten Koeffizienten a_i multipliziert, und die Summe

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i \, w_i(x)$$

wird für die unbekannte Funktion $w = w(x)$ in das Integral

$$\mathsf{A} = \int_1^2 F(w'', w', w, x)\, dx = \text{Min.}$$

eingesetzt, von dem die gegebene Differentialgleichung nach den Regeln der Variationsrechnung abgeleitet werden kann. Diese Differentialgleichung hat, wenn F die zweiten Ableitungen der unbekannten Funktion enthält, die Form

$$L[w] = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right) + \frac{\partial F}{\partial w} = 0\,,$$

wobei $w' = dw/dx$ usw. ist.

Nach Ausführung der Integrationen wird A eine Funktion der a_i:

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}(a_1, a_2, \ldots a_n)\,,$$

und die unbekannten Koeffizienten werden nach den Regeln über gewöhnliche Maxima und Minima durch die Gleichungen erhalten:

$$\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)\,.$$

Wenn die Funktion A eine quadratische Funktion von w und den Ableitungen ist, so ist dies ein System von n linearen Gleichungen, deren Auflösung keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bereitet. Bei statischen Aufgaben sind dies nicht-homogene Gleichungen, bei Schwingungs- oder Stabilitätsaufgaben sind die Gleichungen linear und homogen, und ihre Wurzeln stellen Näherungen für die Eigenwerte dar.

Bei den Anwendungen dieser Methode, wie sie gewöhnlich ausgeführt werden, ist folgender Umstand bemerkenswert: Die Näherungsfunktionen w_i werden nur gemäß den Randbedingungen (gegf. auch den Symmetriebedingungen u. dgl.) ausgewählt, aber ohne jede Rücksichtnahme auf die besondere Form der gegebenen Differentialgleichung, deren Lösung gesucht wird. Wenn man also, wie dies in vielen praktischen Fällen zutrifft, die Lösung der Differentialgleichung für eine Folge von Zahlenwerten eines (oder mehrerer) Parameter zu ermitteln hat, die in der Differentialgleichung auftreten, so gehen diese Parameter nur in die Werte der Koeffizienten a_i ein, mit denen die Näherungsfunktionen w_i multipliziert werden, um durch die Summe dieser Produkte die Lösung aufzubauen. Diese Näherungsfunktionen selbst sind aber von den in der gegebenen Differentialgleichung auftretenden Parametern völlig unabhängig. Die Eigenart der gegebenen Differentialgleichung ist auf die Wahl des Funktionensystems der w_i nur insoweit von Einfluß, als die Randbedingungen durch den Ableitungsprozeß der *Euler-Lagrange*schen Gleichungen durch die bei der Produktintegration entstehenden Glieder als „natürliche Randbedingungen" mit dem zugehörigen Variationsproblem verbunden sind.

Durch diesen Aufbau der gesuchten Lösung wird es verständlich, daß für einen größeren Bereich der Parameterwerte im Einzelnen größere Abweichungen von den richtigen Lösungen auftreten können und auch mehrfach festgestellt wurden.

Für diese Methode sind von verschiedenen Forschern Verbesserungen vorgeschlagen worden, die eine Vereinfachung der Rechenarbeit mit sich bringen, so von *B. G. Galerkin*, *C. B. Biezeno*, *R. Grammel*, *H. Hencky* u. a. Eine etwas anders geartete Abänderung der Methode soll im folgenden

dargelegt werden, u. zw. beruht diese auf einer Verbindung der *Ritz*schen mit der Methode der Kollokation, die sich gerade in dieser Verbindung als besonders vorteilhaft erweist. Durch Vergleich mit den von *L. Collatz* in seinem bekannten Buche Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 2. Auflage 1955 (im folgenden mit *L. C.* zitiert) angeführten Methoden konnte festgestellt werden, daß bei einigen der durchgerechneten Beispiele mit Hilfe dieser Abänderung durch ein einziges Polynom fast dieselbe Genauigkeit erreicht werden kann wie sonst für zwei, manchmal auch für drei Näherungspolynome. Auch für die *Galerkin*sche Methode (u. a.) läßt sich diese Abänderung verwerten.

2. Die Methode. Den Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen bildete die Frage, wie man es erreichen kann, daß auch die Näherungsfunktionen w_i selbst — und nicht nur die Koeffizienten a_i — von den Parameterwerten abhängig werden, mit dem Ziel, auf diese Weise die Methode selbst zu vereinfachen und womöglich zu verbessern. Man wird also trachten, die gegebene Differentialgleichung selbst für die Wahl der Näherungsfunktionen zu verwerten. Dies geht nun freilich nicht für den ganzen Verlauf der gesuchten Lösung; es ist aber möglich, die Differentialgleichung für einen Punkt (gegf. auch für mehrere Punkte) des in Betracht kommenden Intervalls durch die Näherungsfunktionen zu befriedigen.

Es wird also gefordert, daß die gegebene Differentialgleichung für eine geeignet gewählte Stelle x_0 des betrachteten Bereichs (oder deren mehrere) erfüllt sein soll, und zwar unter Verwendung der Näherungsfunktionen w_i. Wir schreiben also die Bedingungen vor

$$\{L[w_i]\}_{x=x_0} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

und betrachten diese als zusätzliche, zu den Randbedingungen hinzutretende Bedingungen, die den Näherungsfunktionen auferlegt werden. Wenn als Näherungsfunktionen Polynome gewählt werden, so können diese zusätzlichen Bedingungen dadurch erfüllt werden, daß der Grad der Polynome durch weitere Glieder erhöht wird. Die Konstanten dieser Polynome werden dann nicht nur durch die Randbedingungen, sondern in gleicher Art auch durch diese zusätzlichen „Kollokationsbedingungen" bestimmt. Auf diese Weise ist es möglich, die besondere Form der gegebenen Differentialgleichung mit den Randbedingungen in Verbindung zu bringen und zugleich zu erreichen, daß die in der Differentialgleichung enthaltenen charakteristischen Parameter auch in die Näherungsfunktionen $w_i(x)$ selbst — und nicht nur in die Beiwerte a_i — eintreten.

Selbstverständlich ist dieses Verfahren auch in der Weise anwendbar, daß nicht nur die gegebene Differentialgleichung selbst, sondern auch deren Ableitungen nach x für solche „Kollokationsbedingungen", die also von der Form sind

$$\left[\frac{d}{dx}\{L[w_i]\}\right]_{x=x_0} = 0\,, \quad \left[\frac{d^2}{dx^2}\{L[w_i]\}\right]_{x=x_0} = 0, \ldots,$$

herangezogen werden, wobei jedes Mal der Grad der Näherungspolynome um eine weitere Einheit erhöht wird. — Auch die Erweiterung auf mehrere unbekannte Funktionen und auf partielle Differentialgleichungen ist grundsätzlich auf dieselbe Weise durchführbar.

Es möge nochmals bemerkt werden, daß die hier angegebene Erweiterung des *Ritz*schen Verfahrens auch von *B. G. Galerkin* u. a. herrührende Art der Konstantenbestimmung in sonst unveränderter Form anwendbar ist.

3. Beispiele. Es dürfte zweckmäßig sein, den geschilderten Vorgang an Hand einiger einfacher Beispiele zu erläutern, die so gewählt werden mögen, daß ein Vergleich mit den nach anderen Methoden erhaltenen Lösungen durchführbar ist. Wir beschränken uns hier auf gewöhnliche Differentialgleichungen und wählen drei Beispiele aus *L. C.* und ein solches über die Verformung der Wand eines zylindrischen Behälters von konstanter Wandstärke, die durch Wasserdruck belastet ist. Wir können uns dabei jedes Mal auf ein einziges Näherungspolynom beschränken und wollen prüfen, wie groß die Abweichungen gegenüber den bekannten Lösungen sind, die durch zwei bzw. drei Näherungsfunktionen erhalten worden sind.

a) Gegeben sei die Differentialgleichung (Siehe *L. C.* Seite 195/6):

$$y'' + (1 + x)\,y + 1 = 0\,, \quad y(\pm 1) = 0$$

mit dem zugehörigen Variationsproblem

$$J[y] = \int_{-1}^{+1} [y'^2 - (1 + x^2)\,y^2 - 2\,y]\,dx = \text{Min.}$$

Die erste Näherungsfunktion, die den Randbedingungen entspricht, wäre $A(1-x^2)$. Die Hinzunahme einer Kollokationsbedingung verlangt die Erhöhung des Grades des Polynoms; wir setzen

$$y = A + C x^2 + D x^4 .$$

Als Kollokationspunkt liegt es nahe die Stelle $x = 0$ zu wählen. Die Differentialgleichung gibt dann für diesen Punkt $2C + A + 1 = 0$, somit ist

$$C = -\frac{1}{2}(1 + A) .$$

Die vorgeschriebenen Randbedingungen liefern dann (für $x = \pm 1$)

$$0 = A - \frac{1}{2}(1 + A) + D , \quad \text{also } D = \frac{1}{2}(1 - A) .$$

Das erste Näherungspolynom lautet mithin

$$y = A - \frac{1}{2}(1 + A) x^2 + \frac{1}{2}(1 - A) x^4 = A\left(1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^4\right) + \frac{1}{2} x^2 (1 - x^2).$$

Setzt man dieses in den Ausdruck für $J[y]$ ein, so liefert die Bedingung für das Extremum

$$\frac{\partial J}{\partial A} = 0$$

nach Ausführung der elementaren Integrationen für A den Wert

$$A = 0{,}927 \ldots$$

mit einer Abweichung von etwa 1/2% gegenüber dem mit zwei bzw. drei Näherungsfunktionen von *L. C.* erhaltenen Wert 0,933 . . Das erste Näherungspolynom erhält demnach die Form:

$$y = 0{,}927 (1 - 0{,}987 x^2 + 0{,}0543 x^4) .$$

b) Gegeben sei die Eigenwertaufgabe (*L. C.* Seite 196/7):

$$-[(1 + x) y']' = \lambda (1 + x) y , \quad y'(0) = y(1) = 0$$

mit dem zugehörigen Variationsproblem

$$J[y] = \int_0^1 [(1 + x) y'^2 - \lambda (1 + x) y^2] \, dx = \text{Min} .$$

Wir machen den Ansatz, durch den die Randbedingung $y'(0) = 0$ sogleich erfüllt ist,

$$y = A + C x^2 + D x^3 .$$

Die Kollokationsbedingung für $x = 0$ lautet

$$-2C = \lambda A , \quad \text{also ist } C = -\frac{1}{2} \lambda A .$$

Ferner gibt die zweite Randbedingung $y(1) = 0$

$$A + C + D = 0 , \quad \text{woraus } D = -\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) A ,$$

so daß das erste Näherungspolynom die Form erhält

$$y = A\left[1 - \frac{\lambda}{2} x^2 - \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) x^3\right] .$$

Man beachte, daß der Eigenwert λ auch im Näherungspolynom vorkommt. (Ähnliches gilt auch für das in a) gegebene Beispiel.)

Der Ausdruck $J[y]$ liefert sodann nach Ausführung der elementaren Integrationen für λ die kubische Gleichung

$$\frac{13}{336} \lambda^3 - \frac{3}{2} \lambda^2 + \frac{411}{28} \lambda - 33 = 0 .$$

Der erste Eigenwert ist nach *L. C.* $\lambda_1 \approx 10/3$. Wir setzen $\lambda = 10/3 + \varepsilon$ und erhalten

$$\lambda \approx \frac{10}{3} + 0{,}026 \ldots$$

Die Abweichung gegen den von *L. C.* erhaltenen Wert 10/3 beträgt daher weniger als 1%.

Die zugehörige Eigenfunktion ist wie bei *L. C.*

$$y = A\left(1 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^4\right) = a\ (0{,}6 - x^2 + 0{,}4\,x^4)\,.$$

Die verbesserte erste Näherungsfunktion leistet daher ungefähr so viel wie die zwei oder drei sonst verwendeten Näherungsfunktionen.

c) Formänderung einer zylindrischen Behälterwand nach Abb. 1. von der Höhe h und dem mittleren Halbmesser r. Ferner sei $w = w(x)$ die Ausweichung der Wand an der Stelle x zufolge der Belastung durch den Wasserdruck, $\delta = \delta(x)$ die mit x im allgemeinen veränderliche Wandstärke, dann ist das Biegemoment an der Stelle x

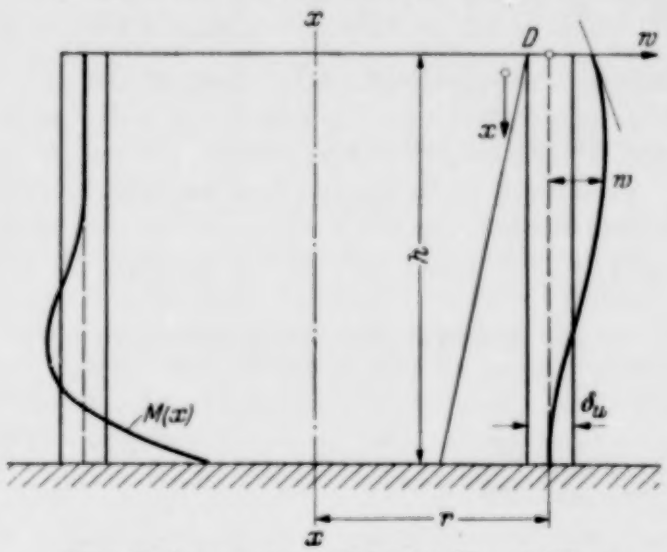

Abb. 1. Verformung eines zylindrischen Wasserbehälters.

$$M_x = -\,E\,J\,\frac{d^2w}{dx^2}$$

und die Querkraft

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx}\,.$$

Die Differentialgleichung des Problems ergibt sich durch die *Euler-Lagrange*sche Gleichung des Variationsproblems

$$\mathsf{A} \equiv \mathsf{A}_i - 2\,\mathsf{A}_a = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\,\delta^3\,\frac{d^2w}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\,k\,\delta\,w - l\,\xi\,w\right) d\xi = \text{Min.}$$

Darin ist zur Abkürzung gesetzt

$$\xi = \frac{x}{h}\,, \qquad k = \frac{12\,h^4\,(1-\nu^2)}{r^2}\,, \qquad l = \frac{12\,h^5\,(1-\nu^2)\,\gamma}{E}\,.$$

Die zugehörige *Euler-Lagrang*sche Gleichung ist dann

$$L[w] \equiv \frac{d^2}{d\xi^2}\left(\delta^3\,\frac{d^2w}{d\xi^2}\right) - k\,\delta\,w - l\,\xi = 0$$

mit den Grenzbedingungen:

$$\xi = 1: \quad w = 0\,, \quad w' = 0 \quad \text{(eingespanntes Ende)}\,,$$
$$\xi = 0: \quad M_x = 0\,, \quad Q_x = 0 \quad \text{(freies Ende)}$$

oder

$$\delta^3\,w'' = 0\,, \quad (\delta^3\,w'')' = 0\,.$$

Für eine Behälterwand mit konstanter Wandstärke $\delta = \delta_u = \text{konst.}$ setzen wir noch

$$\frac{k}{\delta_u^2} = \varkappa\,, \qquad \frac{l}{\delta_u^3} = \lambda\,, \qquad \frac{w}{\lambda} = W\,.$$

Das Variationsproblem nimmt dann die einfachere Form an

$$\mathsf{A} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\,W''^2 + \frac{1}{2}\,\varkappa W^2 - \xi\,W\right) d\xi = \text{Min.}$$

und gibt als *Euler-Lagrange*sche Gleichung

$$L[w] = W^{\mathrm{IV}} + \varkappa W - \xi = 0$$

mit den Randbedingungen

$$\xi = 1: \quad W = 0\,, \quad W' = 0\,,$$
$$\xi = 0: \quad W'' = 0\,, \quad W''' = 0\,.$$

Ein Polynom als Näherungsfunktion muß also nach dem üblichen Verfahren entsprechend diesen Randbedingungen vom vierten Grade sein und die Form haben

$$W = a\left(1 - \frac{4}{3}\,\xi + \frac{1}{3}\,\xi^4\right).$$

Geht man mit diesem Ansatz in den Ausdruck für A, so ergibt sich nach Ausführung der elementaren Integrationen:

$$a = \frac{45}{1296 + 104\,\varkappa}.$$

Bei diesem Verfahren geht der in der gegebenen Differentialgleichung enthaltene Parameter $\varkappa$ nur in die Koeffizienten a, nicht aber in die Näherungsfunktion W selbst ein. Wenn man jedoch die Beziehung zwischen W^{IV} und W, wie sie in der gegebenen Differentialgleichung vorliegt, auch noch für irgend einen geeignet gewählten Punkt ξ heranzieht, als welcher sich im vorliegenden Fall der Punkt $\xi = 0$ empfiehlt, so erreicht man, daß die Form der gegebenen Differentialgleichung auch bei der Festlegung der Näherungsfunktionen berücksichtigt sind, und daß $\varkappa$ auch in diesen selbst auftritt.

Bei dem vorliegenden Beispiel hat man demnach zu setzen

$$\begin{aligned} w &= a + b\,\xi + c\,\xi^4 + d\,\xi^5, \\ w' &= b + 4\,c\,\xi^3 + 5\,d\,\xi^4, \\ w'' &= 12\,c\,\xi^2 + 20\,d\,\xi^3, \\ w''' &= 24\,c\,\xi + 60\,d\,\xi^2 \end{aligned}$$

und als zusätzliche Kollokationsbedingung

$$[W^{IV} + \varkappa\,W - \xi]_{\xi=0} = 24\,c + \varkappa\,a = 0$$

einzuführen. Dadurch erhält man

$$c = -\frac{\varkappa\,a}{24}$$

und durch Auflösung der verbleibenden Gleichungen für das erste Näherungspolynom

$$W(\xi) = a\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\varkappa}{24} - 5\right)\xi - \frac{\varkappa}{24}\,\xi^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{\varkappa}{8} + 1\right)\xi^5\right].$$

Durch die angegebene Erweiterung wird, wie ersichtlich, erreicht, daß der Parameter $\varkappa$ auch in die Näherungsfunktion w_i selbst eingeht.

Führt man jetzt diesen Ausdruck für W_i in das Integral A ein, so kann man die Integrationen mit elementaren Mitteln ausführen und erhält für A einen quadratischen Ausdruck; aus diesem folgt durch Ableitung nach a eine lineare Gleichung, aus der sich a berechnen läßt. Es ergibt sich

$$a = \frac{\varkappa + 120}{0,(2)89\,\varkappa^3 + 3{,}432\,\varkappa^2 + 685\,\varkappa + 3600}.$$

Aus der Gleichung für $W(\xi)$ folgt u. a., daß sich das Vorzeichen von $W'(\xi)$ am freien Ende für $\varkappa = 120$ umkehrt; während es für $\varkappa < 120$ negativ ist, wird es für $\varkappa > 120$ positiv, was auch die exakte Lösung ergibt. Der ursprünglich angegebene Ansatz gibt für alle Werte von $\varkappa$ das gleiche negative Vorzeichen der Ableitung, was offenbar irrig ist.

Dieses Verfahren der Verbesserung kann man beliebig fortsetzen, indem man als weitere Bedingung die Ableitung der gegebenen Differentialgleichung nach ξ für den Punkt $\xi = 0$ hinzufügt, also die Gleichung

$$\left[\frac{d}{d\xi}\{W^{IV} + \varkappa\,W - \xi\}\right]_{\xi=0} = 0$$

und gleichzeitig den Grad des Näherungspolygons um eine weitere Einheit erhöht; man hätte also dann zu setzen

$$W = a + b\,\xi + c\,\xi^4 + d\,\xi^5 + e\,\xi^6$$

und erhielte durch Einsetzen in die vier Randbedingungen (wovon zwei bereits berücksichtigt sind) und der zwei zusätzlichen Bedingungen vier lineare Gleichungen zur Bestimmung der vier Beiwerte $b, \ldots, e$ in Abhängigkeit von a, wobei außerdem auch $\varkappa$ auftritt. Durch Einsetzen des so erhaltenen Ausdrucks in das Minimalproblem A = Min und nach Ausführung der elementaren Integrationen ergibt sich dann durch die Bedingung

$$\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial a} = 0$$

wieder eine lineare Gleichung für a und damit $W = W(\xi, \varkappa)$ als erstes Näherungspolynom.

d) Als letztes Beispiel behandeln wir die nicht-lineare Randwertaufgabe (*L. C.* Seite 197/8)

$$y'' = \frac{3}{2}\, y^2\,, \quad y(0) = 4\,, \quad y(1) = 1\,.$$

Bei der a. a. O. angegebenen Lösung wird deutlich, daß auch bei Erfüllung der Randbedingungen die erhaltenen Lösungskurven der gegebenen Diffentialgleichung — auch bei einem zweigliedrigen Lösungsansatz — nur sehr unvollkommen genügen. Es zeigen sich vielmehr vor allem in den Endpunkten 0 und 1 erhebliche Abweichungen zwischen den Werten von y'' und $3\,y^2/2$. Auch hier erweist sich die Verbindung der *Ritz*schen Methode mit der der Kollokation von Vorteil.

Wir beschränken uns darauf, den Ansatz und die Durchführung der einzelnen Schritte des Verfahrens anzudeuten, wobei auch hier bemerkt werden soll, daß sich dieses in mannigfacher Weise variieren läßt, so daß für die Anpassung an ein vorgelegtes Problem im allgemeinen verschiedene Möglichkeiten in Betracht kommen. In den meisten Fällen wird man als Näherungsfunktionen Polynome wählen, wobei die Anzahl der Glieder von der Zahl der zu erfüllenden Bedingungen abhängt, während der Grad der einzelnen Glieder in weitem Maße willkürlich bleibt und große Mannigfaltigkeiten zuläßt. Im Ganzen gehen wir darauf aus, die Lösung durch ein einziges Polynom darzustellen und bemerken nur, daß die Einführung mehrerer derartiger Polynome ohne Weiteres möglich ist, aber zu einer außerordentlichen Vermehrung der Rechenarbeit führen würde.

Für die vorliegende Aufgabe ist die Einführung eines fünfgliedrigen Polynoms erforderlich, das in der einfachsten Form gewählt werden möge:

$$y = A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + E\,x^4\,.$$

Zur Festlegung der fünf Konstanten $A, \ldots, E$ dienen die zwei Randbedingungen und die zwei Kollokationsbedingungen an den Randpunkten, während die fünfte Konstante durch die *Ritz*sche Methode bestimmt wird.

Durch die Randbedingungen erhält man

$$\begin{aligned} &\text{für} \quad x = 0\,,\ y = 4\text{:} \quad && A = 4\,,\\ &\text{für} \quad x = 1\,,\ y = 1\text{:} \quad && B + C + D + E = -3\,, \end{aligned}$$

und zufolge der Kollokationsbedingungen:

$$\begin{aligned} &\text{für} \quad x = 0\,,\ y = 4\text{:} \quad && \text{aus } y'' = \frac{3}{2}\, y^2\text{:} \quad C = 12\,,\\ &\text{für} \quad x = 1\,,\ y = 1\text{:} \quad && 2\,C + 6\,D + 12\,E = \frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Konstanten

$$D = -26{,}25 - 2\,B \quad \text{und} \quad E = 11{,}25 + B$$

und der Ansatz für die Näherungsfunktion

$$y = (4 + 12\,x^2 - 26{,}25\,x^3 + 11{,}25\,x^4) + B\,(x - 2\,x^3 + x^4)\,.$$

Man beachte, daß dieser Ansatz für alle Werte von B die Rand- und die Kollokationsbedingungen erfüllt. Die Festlegung von B kann nun entweder nach der *Ritz*schen Methode oder durch Einführung einer weiteren Kollokation (etwa für $x = 1/2$) erfolgen. Hierzu führe man diesen Ansatz in das der gegebenen Differentialgleichung zugeordnete Variationsintegral

$$J \equiv \int_0^1 (y'^2 + y^3)\, dx = \text{Min}\,.$$

ein und erhält gemäß dem *Ritz*schen Verfahren

$$\frac{\partial J}{\partial B} \equiv 2 \int_0^1 y' \frac{\partial y'}{\partial B}\, dx + 3 \int_0^1 y^2 \frac{\partial y}{\partial B}\, dx = 0\,.$$

Dadurch erhält man für B eine quadratische Gleichung, in der jedoch der Koeffizient von B^2 (bei Anwendung des Rechenschiebers) sehr nahe verschwindet. Man erhält für B den Näherungswert

$$B = -7{,}65$$

und damit den eingliedrigen Lösungsansatz der Aufgabe

$$y = 4 - 7{,}65\,x + 12\,x^2 - 10{,}95\,x^3 + 3{,}60\,x^4\,,$$

der schon recht gute numerische Ergebnisse liefert.

In dieser Gleichung kann man aber noch eine Korrektion dadurch vornehmen, daß man durch den Ansatz

$$B = -7{,}65 + \beta$$

nachträglich noch eine weitere Kollokationsbedingung etwa für den Punkt $x = 1/2$ einführt. Gemäß der angegebenen Gleichung erhält man durch eine genauere Rechnung für B die Werte

$$B_1 = -8{,}622 \quad \text{und} \quad B_2 = -43{,}094$$

folgen. Damit ergeben sich für die beiden Lösungen der Differentialgleichung die Polynome

$$y_1 = 4 - 8{,}622\,x + 12\,x^2 - 9{,}006\,x^3 + 2{,}628\,x^4$$

und

$$y_2 = 4 - 43{,}094\,x + 12\,x^2 + 59{,}938\,x^3 - 318{,}44\,x^4$$

und als Funktionswerte für die erste Lösung

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y_1	4	2,463	1,716	1,285	1
y_1'	− 8,622	− 4,148	− 2,063	− 1,338	− 1,128
y_1''	24	12,462	4,866	1,212	1,5
$\frac{3}{2} y_1^2$	24	9,1	4,419	2,490	1,5

und für die zweite Lösung

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y_2	4	− 5,221	− 9,045	− 6,347	1
y_2'	−43,094	−27,847	−12,063	+22,309	+33,344
y_2''	24	90,024	108,282	78,774	1,5
$\frac{3}{2} y_2^2$	24	40,87	122,718	60,726	1,5

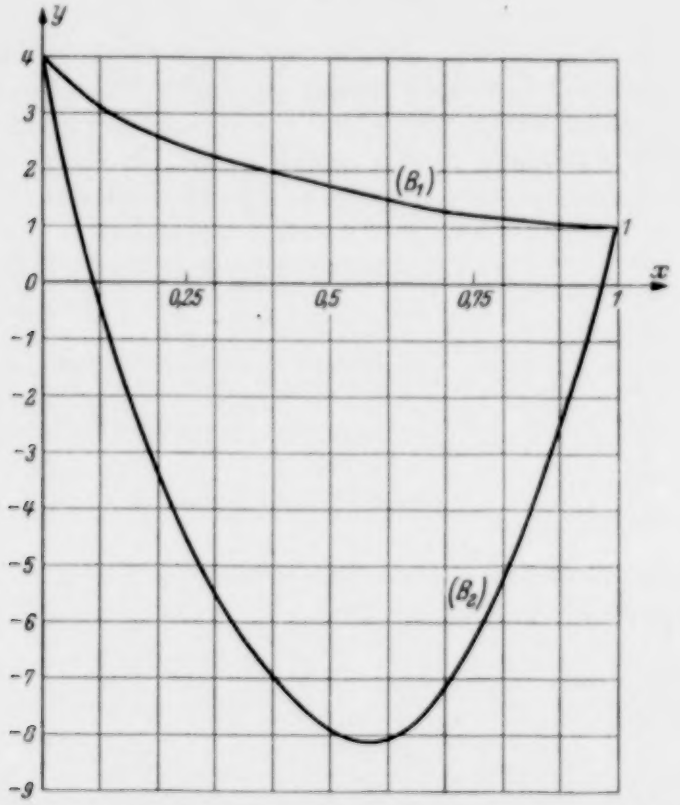

Abb. 2. Verlauf der Lösungen der nicht-linearen Randwertaufgabe nach Beispiel d).

Die so erhaltenen Lösungskurven sind in Abb. 2 dargestellt. Man beachte, daß für $y = 0$ gleichzeitig auch $y'' = 0$ und $y''' = 0$ ist, so daß die zweite Lösung in $y = 0$ keinen gewöhnlichen Wendepunkt sondern einen Flachpunkt besitzt und durch diese Punkte in nach oben konkaver Krümmung durchläuft.

4. Schlußbemerkung. Durch die übliche Form der *Ritz*schen Methode ergeben sich Näherungsfunktionen, die wohl die vorgegebenen Randbedingungen erfüllen, aber in vielen Fällen der vorgelegten Differentialgleichung nur in unvollkommener Weise genügen. Wenn man jedoch die Näherungsfunktionen so umgestaltet, daß sie außer den Randbedingungen auch noch Kollokationsbedingungen für einen oder mehrere Punkte des vorgegebenen Bereiches erfüllen, so gelingt es oft schon mit einer so veränderten Näherungsfunktion eine Verbesserung der Werte der gesuchten Funktionen und ihrer Ableitungen im ganzen Bereiche zu erhalten. Die Methode läßt sich in mannigfacher Weise ausgestalten und ist für viele Randwertaufgaben für Differentialgleichungen, die aus einem Variationsproblem entspringen und auch für mehrere unabhängig und abhängig Veränderliche anwendbar. Es ist zu vermuten, daß durch die zusätzlichen Kollokationsbedingungen der Wert der Minima der Integrale herabgesetzt und dadurch die Annäherungen verbessert werden.

Zur vollständigen Lösung des Problems würden sodann noch die Erledigung der Konvergenzfrage und auch eine Fehlerabschätzung gehören.

(Eingegangen am 20. Januar 1955).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *Theodor Pöschl*, Karlsruhe i. B. Wendtstr. 5 Fernruf 52 480.

Reine ebene Biegung bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz

Von F. Jindra

1. Einleitung. In einer früheren Mitteilung[1] wurde der ebene Spannungszustand bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen durch Einführung der *Airy*schen Spannungsfunktion behandelt. In kartesischen Koordinaten x, y lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Spannungszustandes identisch erfüllen, wenn man die Spannungen von einer Spannungsfunktion $F(x, y)$ in bekannter Weise ableitet:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}. \tag{1}$$

Mit dem Kompressionsmodul K und dem Schubmodul G genügt die Spannungsfunktion der nichtlinearen Differentialgleichung

$$\Delta\left\{\left[\frac{1}{9K}k(s_0) + \frac{1}{3G}g(t_0^2)\right]\Delta F\right\} - \frac{1}{2G}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x\, \partial y}\right] = 0 \tag{2}$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= \frac{1}{9K}\Delta F = \frac{1}{9K}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right), \\ t_0^2 &= \frac{2}{9G^2}\left[(\Delta F)^2 + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - 3\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]. \end{aligned}\right| \tag{3}$$

Die sogenannte Kompressionsfunktion $k(s_0)$ und Schubfunktion $g(t_0^2)$ beschreiben das nichtlineare Verhalten des Materials und werden als Potenzreihen der dimensionslosen invarianten Spannungsgrößen (3) eingeführt. Dabei beschränkt man sich im wesentlichen wie in der ersten Mitteilung auf den Sonderfall, daß diese Funktionen in der Form

$$k(s_0) \equiv 1, \quad g(t_0^2) \equiv 1 + g_2 t_0^2 \quad (g_2 = \text{konst.}) \tag{4}$$

dargestellt werden können.

Die vorliegende Mitteilung beschäftigt sich mit den Anwendungen der Methode der *Airy*schen Spannungsfunktion auf das ebene Problem der reinen Biegung. Wir untersuchen die Biegung eines Rechteckstreifens, die leicht in geschlossener Form gelöst werden kann, und die eines Kreisringsektors, die sich aber nur durch ein Näherungsverfahren behandeln läßt. Die numerische Auswertung der Ergebnisse ergibt wesentliche Änderungen der Spannungsverteilung gegenüber der linearen Theorie und einen erheblichen Abbau der Spannungsspitzen durch kleine Abweichungen des Elastizitätsgesetzes von der Linearität.

2. Der Rechteckstreifen. Im folgenden betrachten wir einen Rechteckstreifen von der Höhe h und beliebiger Länge, der an beiden Enden durch Biegemomente M beansprucht wird (Abb. 1). Die als klein anzusehende Dicke des Streifens senkrecht zur Zeichenebene ist gleich Eins gesetzt.

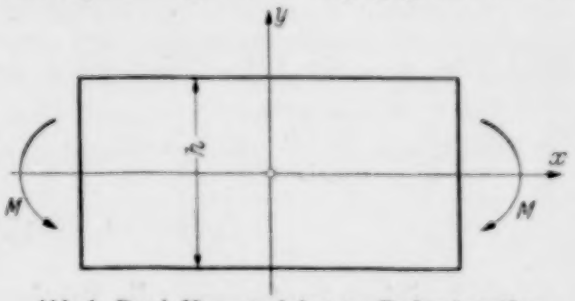

Abb. 1. Durch Momente belasteter Rechteckstreifen.

Wir gehen hier ähnlich wie in der linearen Theorie von der Voraussetzung aus, daß der Spannungszustand der reinen Biegung durch die einzige Spannungskomponente $\sigma_x(y)$ beschrieben wird, also

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x(y), \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = 0. \tag{5}$$

Nach (3) wird

$$s_0 = \frac{1}{9K}\sigma_x, \qquad t_0^2 = \frac{2}{9G^2}\sigma_x^2.$$

Dann vereinfacht sich (2) unter Beachtung von (4) zu

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(\sigma_x + \frac{2}{3}\lambda\sigma_x^3\right) = 0 \tag{6}$$

[1] *F. Jindra*, Ing.-Arch. 22 (1954), S. 121.

mit der Stoffzahl

$$\lambda = \frac{g_2 K}{(3K + G) G^2}, \tag{7}$$

die hier allein die Abweichung von der Linearität kennzeichnet. Die Integration ergibt sofort

$$\sigma_x + \frac{2}{3}\lambda \sigma_x^3 = C y + D, \tag{8}$$

wobei C und D Integrationskonstanten bedeuten. Wir setzen weiter

$$D = 0. \tag{8a}$$

Der Fall $D \neq 0$ entspricht einer zusätzlichen gleichmäßigen Beanspruchung in der x-Richtung (welcher Fall uns hier aber nicht interessiert).

Mit Hilfe der *Cardani*schen Formel lösen wir die kubische Gleichung (8) auf. Als einzige reelle Wurzel finden wir die Biegespannung

$$\sigma_x = 3\sqrt[3]{\frac{\mu}{4}}\left(\sqrt[3]{C y + \sqrt{C^2 y^2 + 2\mu}} + \sqrt[3]{C y - \sqrt{C^2 y^2 + 2\mu}}\right) \tag{9}$$

mit der Abkürzung $\mu = \frac{1}{9\lambda}$.

Für die Randspannung an der Stelle $y = h/2$ folgt

$$(\sigma_x)_{y=h/2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\mu}\left(\sqrt[3]{C h + \sqrt{C^2 h^2 + 8\mu}} + \sqrt[3]{C h - \sqrt{C^2 h^2 + 8\mu}}\right). \tag{10}$$

Die zugehörige Spannungsfunktion F wird dann

$$\begin{aligned} F = \iint \sigma_x \, dy^2 = \frac{9}{280 C^2}\sqrt[3]{\frac{\mu}{4}}\Big[&\left(19 C^2 y^2 - 16\mu - 9 C y\sqrt{C^2 y^2 + 2\mu}\right)\sqrt[3]{C y + \sqrt{C^2 y^2 + 2\mu}} \\ &+ \left(19 C^2 y^2 - 16\mu + 9 C y\sqrt{C^2 y^2 + 2\mu}\right)\sqrt[3]{C y - \sqrt{C^2 y^2 + 2\mu}}\Big]. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Konstante C errechnet sich aus der Forderung, daß das Moment der in einem beliebigen Querschnitt wirkenden Spannungen σ_x das vorgeschriebene Biegemoment M ergeben muß:

$$\begin{aligned} M = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x y \, dy = \frac{9}{35 C^2}\sqrt[3]{\frac{\mu}{4}}\Big\{&\left[6\left(C^2 y^2 + \mu\right) - C y\sqrt{C^2 y^2 + 2\mu}\right]\sqrt[3]{C y + \sqrt{C^2 y^2 + 2\mu}} \\ &+ \left[6\left(C^2 y^2 + \mu\right) + C y\sqrt{C^2 y^2 + 2\mu}\right]\sqrt[3]{C y - \sqrt{C^2 y^2 + 2\mu}}\Big\}_{-h/2}^{+h/2}. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Integrationsgrenzen erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{M}{h^2} = \frac{9\sqrt[3]{\mu}}{140 C^2 h^2}\Big\{&\left[6\left(C^2 h^2 + 4\mu\right) - C h\sqrt{C^2 h^2 + 8\mu}\right]\sqrt[3]{C h + \sqrt{C^2 h^2 + 8\mu}} \\ &+ \left[6\left(C^2 h^2 + 4\mu\right) + C h\sqrt{C^2 h^2 + 8\mu}\right]\sqrt[3]{C h - \sqrt{C^2 h^2 + 8\mu}}\Big\} \end{aligned} \tag{12}$$

und nach einiger Umformung die Bestimmungsgleichung für C

$$\begin{aligned} &10125\lambda^2 h^7 C^5 - 4900\lambda^2 M\left(280\lambda M^2 + 27 h^4\right) C^4 \\ &+ 9576\lambda h^5 C^3 - 117600\lambda h^2 M C^2 + 2240 h^3 C - 26880 M = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Für $\lambda = 0$ gehen unsere Gleichungen in die bekannte Lösung der linearen Theorie über. Aus (8) und (13) finden wir

$$\sigma_x^* = C^* y, \qquad M = \frac{1}{12} C^* h^3 \tag{14}$$

und somit die Randspannung

$$(\sigma_x^*)_{y=h/2} = 6\frac{M}{h^2}. \tag{15}$$

Hierin bezeichnet C^* die Integrationskonstante der linearen Theorie.

Abb. 2 zeigt die Verteilung der Spannung σ_x längs der y-Achse für einen beliebigen Querschnitt, und zwar für $M/h^2 = 200$ kg/cm und $\lambda = 5.10^{-6}$ cm^4/kg^2. Gestrichelt eingetragen ist die Lösung (14) der linearen Theorie. Die Biegespannung σ_x^* ist über dem Querschnitt geradlinig verteilt, wie es die

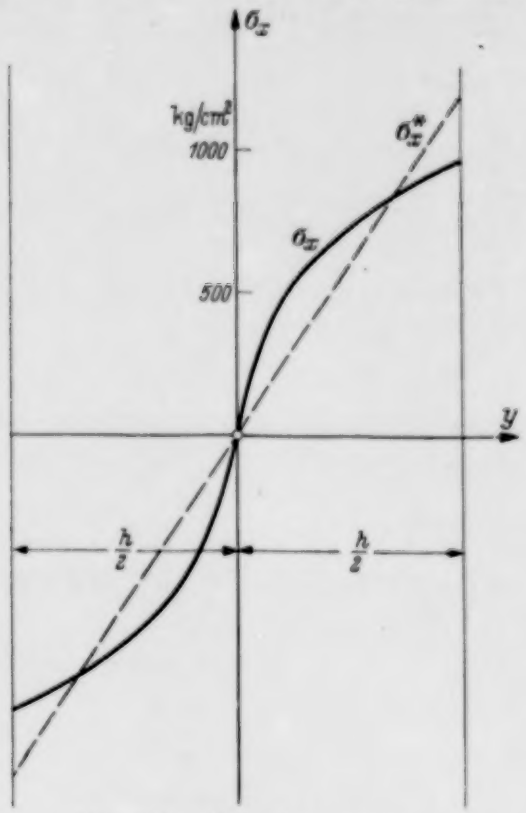

Abb. 2. Verlauf der Biegespannung.

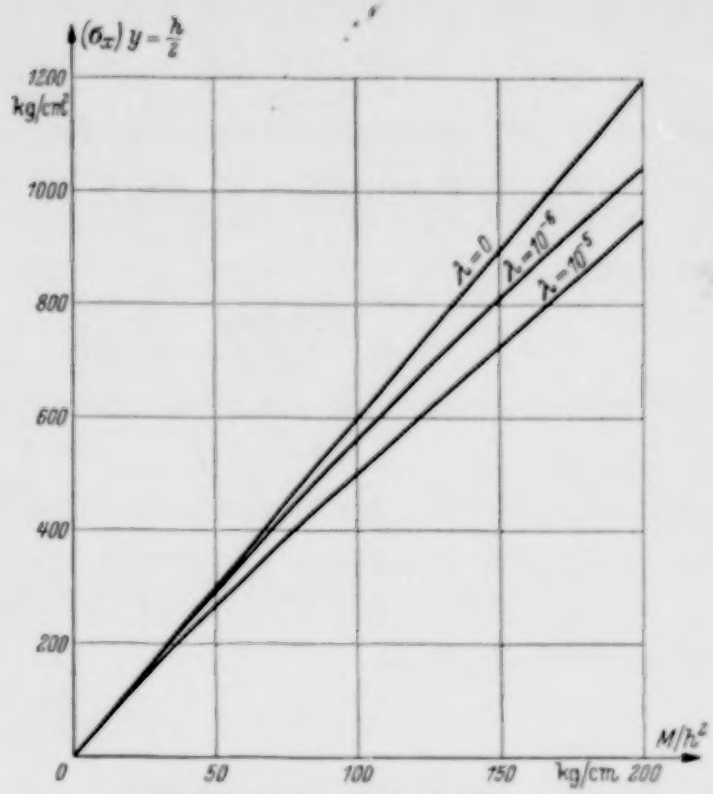

Abb. 3. Randspannung im Rechteckstreifen.

elementare Biegelehre voraussetzt. Man erkennt einen starken Abbau der Spannungsspitze an den Rändern $y = \pm h/2$ infolge der Nichtlinearität. Die Werte der Randspannung $(\sigma_x)_{y=h/2}$ für verschiedene Annahmen von der Stoffzahl λ in Abhängigkeit von der Größe M/h^2 zeigt Abb. 3. Um den Einfluß der Nichtlinearität besser zu übersehen, ist schließlich in Abb. 4 die Änderung der Spannung $\Delta\sigma_x = \sigma_x - \sigma_x^*$ an der Stelle $y = \pm h/2$ im Verhältnis zur Spannung σ_x^* der linearen Theorie nach (15) abhängig von M/h^2 dargestellt.

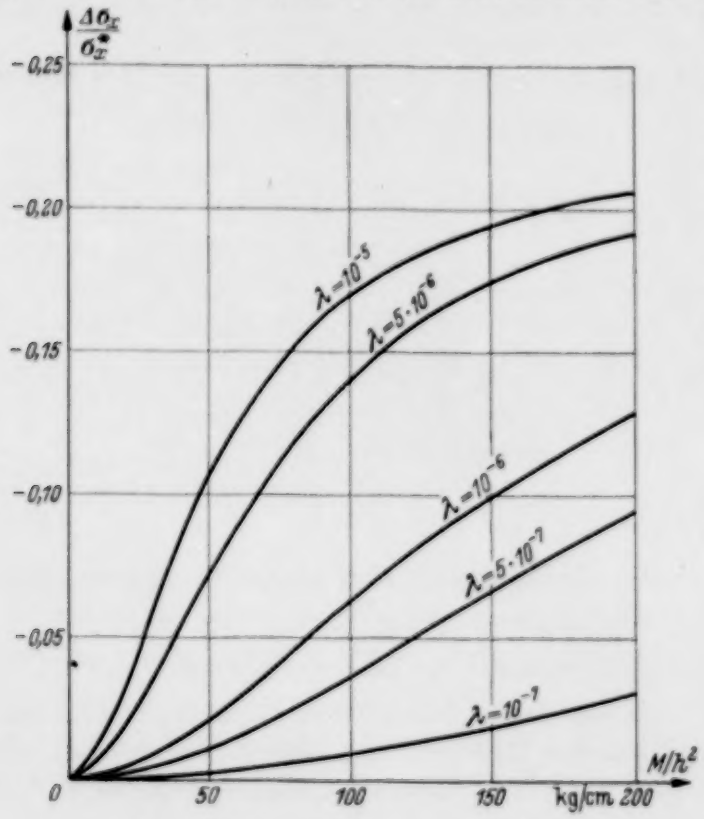

Abb. 4. Änderung der Biegespannung am Rand.

3. Der Kreisringsektor. Als zweites Beispiel behandeln wir den in Abb. 5 dargestellten krummen dünnen Stab von der Gestalt eines Kreisringsektors mit den radialen Be-

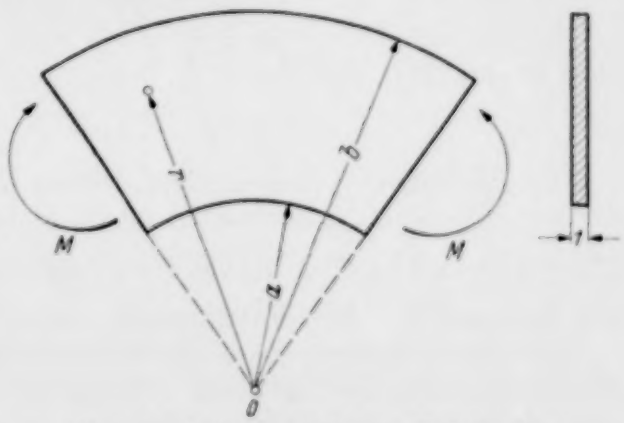

Abb. 5. Durch Momente belasteter Kreisringsektor.

grenzungen a und b, der an beiden Enden durch Biegemomente M belastet ist. Die überall konstante, gleich Eins gesetzte Dicke senkrecht zur Zeichenebene sei klein gegenüber den übrigen Abmessungen, so daß wir den Spannungszustand als einen ebenen auffassen dürfen.

Wir führen ebene Polarkoordinaten r, φ ein, indem wir den Mittelpunkt 0 zum Koordinatenursprung nehmen. Da in jedem Querschnitt dasselbe Biegemoment übertragen wird, ist dieser Spannungszustand von Winkel φ unabhängig. Das Problem hängt also nur vom Radius r ab. Die Spannungskomponenten sind dann bekanntlich durch die Beziehungen gegeben:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}, \qquad \sigma_\varphi = \frac{d^2F}{dr^2}, \qquad \tau_{r\varphi} = 0. \tag{16}$$

Damit kann die Differentialgleichung (2) in der folgenden Form angeschrieben werden:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left\{\left[\frac{1}{9K}k(s_0) + \frac{1}{3G}g(t_0^2)\right]\left(\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right)\right\} - \frac{1}{2G}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{dF}{dr}\frac{dg(t_0^2)}{dr}\right) = 0 \tag{17}$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= \frac{1}{9K}\left(\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right), \\ t_0^2 &= \frac{2}{9G^2}\left[\left(\frac{d^2F}{dr^2}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{d^2F}{dr^2}\frac{dF}{dr} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dF}{dr}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Beachtet man noch (4), so kommt nach kurzer Umformung

$$\begin{aligned}(2\lambda r^2 F''^2 - 2\lambda r F'' F' + \lambda F'^2 + r^2) r^2 F^{IV} + 2\lambda(2 r F'' - F') r^3 F'''^2 + 2\lambda(2 r F'' - F') r F''' F' \\ + 2 r^3 F''' + (\lambda r^2 F''^2 - 3\lambda r F'' F' + 2\lambda F'^2 - r^2) F'' + r F' = 0,\end{aligned} \tag{19}$$

wobei wieder die Stoffzahl

$$\lambda = \frac{g_2 K}{(3K + G) G^2} \tag{20}$$

eingeführt wird. Striche bedeuten Ableitungen nach r.

Dazu treten die folgenden Randbedingungen:

$$\sigma_r = 0 \quad \text{für} \quad r = a \quad \text{und} \quad r = b, \tag{21}$$

$$\int_a^b \sigma_\varphi \, dr = 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b \sigma_\varphi \, r \, dr = -M. \tag{22}$$

Mit Hilfe von (16) drücken wir die Bedingungen (22) in der Spannungsfunktion aus. Wir bilden zunächst

$$\int_a^b \sigma_\varphi \, dr = \int_a^b \frac{d^2F}{dr^2} \, dr = \left|\frac{dF}{dr}\right|_a^b = 0. \tag{23}$$

Durch partielle Integration der zweiten Gleichung (22) erhalten wir

$$\int_a^b \sigma_\varphi \, r \, dr = \int_a^b \frac{d^2F}{dr^2} \, r \, dr = \left|\frac{dF}{dr} \, r\right|_a^b - \int_a^b \frac{dF}{dr} \, dr,$$

und wegen (21) folgt

$$F\Big|_a^b = M. \tag{24}$$

Die nichtlineare Differentialgleichung (19) vierter Ordnung läßt sich einmal integrieren. Man findet

$$(2\lambda r^2 F''^2 - 2\lambda r F'' F' + \lambda F'^2 + r^2) r F''' + (\lambda r F'' F' - \lambda F'^2 + r^2) F'' - r F' - C r^2 = 0 \tag{25}$$

mit einer willkürlichen Integrationskonstanten C, wie man leicht durch Einsetzen nachprüfen kann.

Als Näherungsverfahren zur weiteren Integration der Differentialgleichung (25) wenden wir das *Galerkin*sche Verfahren an. Für die erste Ableitung F' der Spannungsfunktion machen wir den sehr einfachen, zweigliedrigen Ansatz

$$Y = (r - b)(r - a)(c_1 + c_2 r), \tag{26}$$

wo c_1 und c_2 noch zu bestimmende Freiwerte sind. Jede der zwei sogenannten Koordinatenfunktionen befriedigt nur die homogenen Randbedingungen (21) und (23).

Setzt man die Näherungsfunktion (26) in (25) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}D(r;c_1,c_2) = {}&\lambda\,[12\,r^5 - 11\,(b+a)\,r^4 + (3\,b^2 + 2\,b\,a + 3\,a^2)\,r^3 + 2\,b\,a\,(b+a)\,r^2\\ &- b\,a\,(b+a)^2\,r + b^2\,a^2\,(b+a)]\,c_1^3\\ &+\lambda[71\,r^6 - 82\,(b+a)\,r^5 + (30\,b^2 + 53\,b\,a + 30\,a^2)\,r^4 - (3\,b^3 + 5\,b^2\,a + 5\,b\,a^2 + 3\,a^3)\,r^3\\ &- b\,a\,(2\,b^2 + 3\,b\,a + 2\,a^2)\,r^2 + 2\,b^2\,a^2\,(b+a)\,r - b^3\,a^3]\,c_1^2\,c_2\\ &+\lambda[135\,r^6 - 186\,(b+a)\,r^5 + (82\,b^2 + 189\,b\,a + 82\,a^2)\,r^4\\ &- (11\,b^3 + 53\,b^2 a + 53\,b\,a^2 + 11\,a^3)\,r^3\\ &+ b\,a\,(2\,b^2 + 5\,b\,a + 2\,a^2)\,r^2 + 2\,b^2\,a^2\,(b+a)\,r - b^3\,a^3]\,r\,c_1\,c_2^2\\ &+\lambda\,[84\,r^5 - 135\,(b+a)\,r^4 + (71\,b^2 + 186\,b\,a\\ &+ 71\,a^2)\,r^3 - 2\,(6\,b^3 + 41\,b^2\,a + 41\,b\,a^2 + 6\,a^3)\,r^2\\ &+ b\,a\,(11\,b^2 + 30\,b\,a + 11\,a^2)\,r - 3\,b^2\,a^2\,(b+a)]\,r^3\,c_2^3\\ &+ (3\,r^2 - b\,a)\,r\,c_1 + (8\,r - 3\,b - 3\,a)\,r^3\,c_2 - C\,r^2.\end{aligned}$$

Nach der *Galerkin*schen Vorschrift verlangt man dann die Orthogonalität dieses Ausdrucks zu den beiden Koordinatenfunktionen

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b D(r;c_1,c_2)\,(r-b)\,(r-a)\,dr &= 0\,,\\ \int_a^b D(r;c_1,c_2)\,(r-b)\,(r-a)\,r\,dr &= 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Die Auswertung ergibt

$$\left.\begin{aligned}\lambda(\alpha_{30}\,c_1^3 + \alpha_{21}\,c_1^2\,c_2 + \alpha_{12}\,c_1\,c_2^2 + \alpha_{03}\,c_2^3) + \alpha_1\,c_1 + \alpha_2\,c_2 - \alpha_0\,C &= D\,,\\ \lambda(\beta_{30}\,c_1^3 + \beta_{21}\,c_1^2\,c_2 + \beta_{12}\,c_1\,c_2^2 + \beta_{03}\,c_2^3) + \beta_1\,c_1 + \beta_2\,c_2 - \beta_0\,C &= 0\end{aligned}\right| \tag{28}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}\alpha_{30} &= 132\,(\varrho+1)\,(\varrho-1)^2\,[11\,(\varrho^2+1) - 8\,\varrho]\,a^3\,,\\ \alpha_{21} &= 11\,(\varrho-1)^2\,[343\,(\varrho^4+1) + 116\,\varrho\,(\varrho^2+1) + 90\,\varrho^2]\,a^4\,,\\ \alpha_{12} &= 132\,(\varrho+1)\,(\varrho-1)^2\,[25\,(\varrho^4+1) - 14\,\varrho\,(\varrho^2+1) + 20\,\varrho^2]\,a^5\,,\\ \alpha_{03} &= (\varrho-1)^2\,[983\,(\varrho^6+1) + 493\,\varrho\,(\varrho^4+1) + 269\,\varrho^2\,(\varrho^2+1) + 206\,\varrho^3]\,a^6\,,\\ \alpha_1 &= 924\,(\varrho+1)\,[3\,(\varrho^2+1) - \varrho]\,a\,,\\ \alpha_2 &= 66\,[38\,(\varrho^4+1) + 23\,\varrho\,(\varrho^2+1) + 18\,\varrho^2]\,a^2\,,\\ \alpha_0 &= 462\,[3\,(\varrho^2+1) + 4\,\varrho]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\beta_{30} &= 33\,(\varrho-1)^2\,[35\,(\varrho^4+1) + 20\,\varrho\,(\varrho^2+1) + 2\,\varrho^2]\,a^3\,,\\ \beta_{21} &= 396\,(\varrho+1)\,(\varrho-1)^2\,[8\,(\varrho^4+1) - 4\,\varrho\,(\varrho^2+1) + 6\,\varrho^2]\,a^4\,,\\ \beta_{12} &= (\varrho-1)^2\,[2857\,(\varrho^6+1) + 1547\,\varrho\,(\varrho^4+1) + 835\,\varrho^2\,(\varrho^2+1) + 610\,\varrho^3]\,a^5\,,\\ \beta_{03} &= 4\,(\varrho+1)\,(\varrho-1)^2\,[217\,(\varrho^6+1) - 92\,\varrho\,(\varrho^4+1) + 164\,\varrho^2\,(\varrho^2+1) - 116\,\varrho^3]\,a^6\,,\\ \beta_1 &= 66\,[30\,(\varrho^4+1) + 27\,\varrho\,(\varrho^2+1) + 26\,\varrho^2]\,a\,,\\ \beta_2 &= 132\,(\varrho+1)\,[15\,(\varrho^4+1) - 4\,\varrho\,(\varrho^2+1) + 13\,\varrho^2]\,a^2\,,\\ \beta_0 &= 462\,(\varrho+1)\,[2\,(\varrho^2+1) + \varrho]\,,\end{aligned}$$

wobei das Halbmesserverhältnis

$$\varrho = \frac{b}{a} \tag{29}$$

gesetzt ist.

Eliminiert man aus (28) die Integrationskonstante C, so entsteht nach kurzer Rechnung

$$\lambda\,(\delta_{30}\,c_1^3 + \delta_{21}\,c_1^2\,c_2 + \delta_{12}\,c_1\,c_1^2 + \delta_{03}\,c_2^3) + \delta_1\,c_1 + \delta_2\,c_2 = 0 \tag{30}$$

mit den weiteren Abkürzungen

$$\begin{aligned}\delta_{30} &= 33\,(\varrho-1)^2\,[17\,(\varrho^4+1) + 78\,\varrho\,(\varrho^2+1) + 138\,\varrho^2]\,a^3\,,\\ \delta_{21} &= 11\,(\varrho+1)\,(\varrho-1)^2\,[178\,(\varrho^4+1) + 501\,\varrho\,(\varrho^2+1) + 778\,\varrho^2]\,a^4\,,\\ \delta_{12} &= (\varrho-1)^2\,[1971\,(\varrho^6+1) + 7207\,\varrho\,(\varrho^4+1) + 13867\,\varrho^2\,(\varrho^2+1) + 15422\,\varrho^3]\,a^5\,,\\ \delta_{03} &= (\varrho+1)\,(\varrho-1)^2\,[638\,(\varrho^6+1) + 1675\,\varrho\,(\varrho^4+1) + 2815\,\varrho^2(\varrho^2+1) + 2416\,\varrho^3]\,a^6\,,\\ \delta_1 &= 66\,[6\,(\varrho^4+1) + 31\,\varrho\,(\varrho^2+1) + 66\,\varrho^2]\,a\,,\\ \delta_2 &= 66\,(\varrho+1)\,[14\,(\varrho^4+1) + 40\,\varrho\,(\varrho^2+1) + 67\,\varrho^2]\,a^2\,.\end{aligned}$$

Nun haben wir noch die Bedingung (24) zu erfüllen. Sie verlangt

$$M = \int_a^b Y\,dr = -\frac{1}{12}(\varrho-1)^3\,[2\,c_1 + (\varrho+1)\,c_2\,a]\,a^3$$

oder

$$2\,c_1\,a + (\varrho+1)\,c_2\,a^2 = -\frac{12}{(\varrho-1)^3}\,\frac{M}{a^2}\,. \tag{31}$$

Hat man die Beiwerte c_1 und c_2 aus (30) und (31) bestimmt, so können die Näherungswerte für die Spannungen gemäß (16) berechnet werden. Für die Spannungskomponenten ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= (r-b)\,(r-a)\left(\frac{1}{r}\,c_1 + c_2\right),\\ \sigma_\varphi &= (2\,r-b-a)\,c_1 + [3\,r^2 - 2\,(b+a)\,r + b\,a]\,c_2\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

und somit für die Randwerte der Tangentialspannung

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_\varphi)_{r=a} &= -(\varrho-1)\,(c_1\,a + c_2\,a^2),\\ (\sigma_\varphi)_{r=b} &= (\varrho-1)\,(c_1\,a + \varrho\,c_2\,a^2).\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Zum Vergleich sei hier noch die bekannte Lösung[1] der linearen Theorie ($\lambda = 0$) hinzugefügt. Sie lautet

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r^* &= -\frac{4\,M}{N}\left(b^2\ln\frac{r}{b} + a^2\ln\frac{a}{r} + \frac{a^2\,b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a}\right),\\ \sigma_\varphi^* &= -\frac{4\,M}{N}\left(b^2\ln\frac{r}{b} + a^2\ln\frac{a}{r} - \frac{a^2\,b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a} + b^2 - a^2\right)\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

mit

$$N = (b^2-a^2)^2 - 4\,b^2\,a^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2.$$

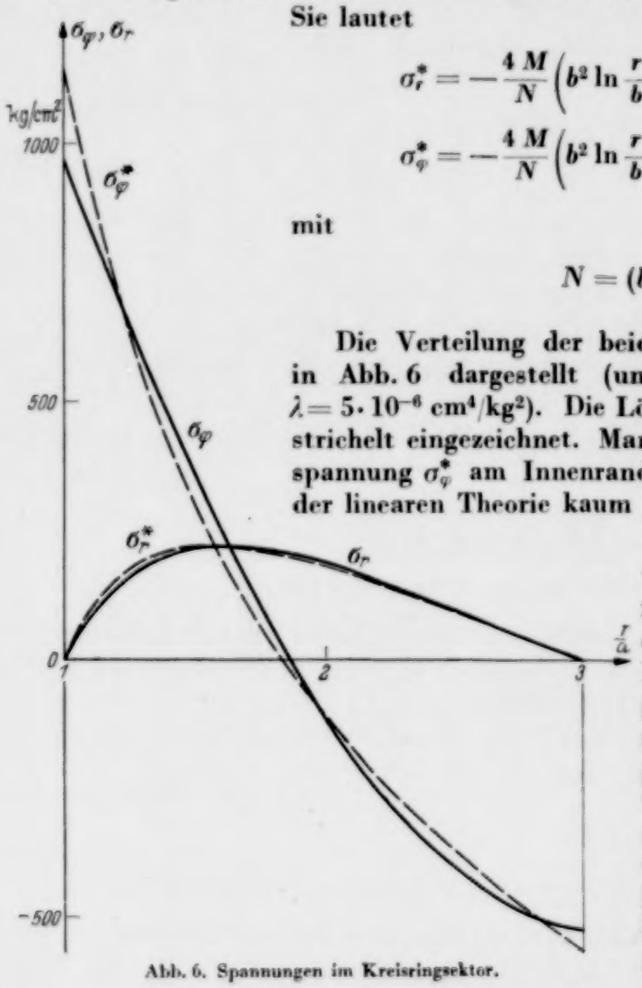

Abb. 6. Spannungen im Kreisringsektor.

Die Verteilung der beiden Spannungen ist längs eines Halbmessers in Abb. 6 dargestellt (und zwar für $\varrho = 3$, $M/a^2 = 200$ kg/cm und $\lambda = 5\cdot 10^{-6}$ cm⁴/kg²). Die Lösungen der linearen Theorie nach (34) sind gestrichelt eingezeichnet. Man erkennt eine starke Abnahme der Tangentialspannung σ_φ^* am Innenrand, während die radiale Spannung σ_r gegenüber der linearen Theorie kaum geändert wird.

Schließlich soll noch bemerkt werden, daß wir eine größere Genauigkeit für die Näherungswerte der Spannungsverteilung durch einen Ansatz erhalten können, in dem die Koordinatenfunktionen alle vier Randbedingungen für sich erfüllen (wie es ja beim *Galerkin*schen Verfahren tatsächlich sein muß). Die hier gezeigte Rechnung hat mehr qualitative Bedeutung; also gibt sie nur noch das Grundsätzliche des Vorganges bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz wieder; doch ist nach Erfahrungen bei anderen Problemen dieser Art anzunehmen, daß auch zahlenmäßig den Ergebnissen kein allzugroßer Fehler anhaftet.

(Eingegangen am 31. Januar 1955.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *F. Jindra*, Stuttgart-O, Gerokstr. 70.

[1] Vgl. z. B. S. *Timoshenko*, Theory of Elasticity, 1. Aufl., S. 58, New York 1934.

Stahlleichtbau von Maschinen

Von Dipl.-Ing. **K. Bobek,** Konstruktionsdirektor der Allg. Elektrizitäts-Gesellschaft Berlin, Dr.-Ing. **A. Heiß,** Alfred Treves, Maschinen- und Armaturenfabrik KG., Frankfurt/Main, und Dr.-Ing. **Fr. Schmidt,** Oberingenieur der MAN Augsburg. (Konstruktionsbücher. Hrsg. Prof. Dr.-Ing. K. Kollmann, Karlsruhe, 1. Band.) Zweite neubearbeitete Auflage. Mit 243 Abbildungen. VII, 183 Seiten Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen DM 24,—

Inhaltsübersicht: **I. Grundlagen des Stahlleichtbaues.** Von Dipl.-Ing. K. Bobek, Berlin: Leichtbau allgemein. Vorteile des Stahlleichtbaues. Allgemeine Konstruktionsgrundsätze. Arbeitsverfahren. Grundlagen zur Festigkeitsrechnung. — **II. Stahlleichtbau von Elektromaschinen.** Von Dipl.-Ing. K. Bobek, Berlin: Die besonderen Bedingungen und Grundsätze des Elektromaschinenbaues. Kleinmaschinen. Großmaschinen. — **III. Stahlschweißbau von Werkzeugmaschinen.** Von Dr.-Ing. A. Heiß, Frankfurt/Main: Die Entwicklung des Stahlschweißbaues von Werkzeugmaschinen. Grundformen von Werkzeugmaschinen-Gestellen. Entwicklungsrichtungen für die Gestaltung von Werkzeugmaschinengestellen in Stahlschweißbau. Bemessungforderungen im Werkzeugmaschinenbau. Das Schwingungsmeßprinzip nach Kettner. Elementegestaltung im Stahlschweißbau. Erklärung der Vergrößerung der Dämpfung durch Scheuerwirkung. Konstruktionsbeispiel aus dem Zellenbau. Konstruktionsbeispiele aus der Plattenbauweise. Kurze Zusammenfassung über den Stand der Anwendung des Stahlschweißbaues und Ausblick auf die zukünftige Entwicklung. — **IV. Stahlleichtbau für Verbrennungsmaschinen.** Von Dr.-Ing. Fr. Schmidt, Augsburg: Allgemeines über Stahlleichtbau für Verbrennungsmaschinen. Richtlinien für die Konstruktion. Entwurf von Gestellen und Grundplatten. Weitere Bauteile von Verbrennungsmotoren. Allgemeine Richtlinien für den Leichtbau. — **Schrifttum zu I—IV — Sachverzeichnis.**

Gestaltung von Fahrzeuggetrieben

Von Dr.-Ing. **Hans Reichenbächer,** Osnabrück. (Konstruktionsbücher. Hrsg. Prof. Dr.-Ing. K. Kollmann, Karlsruhe, 15. Band.) Mit 164 Abbildungen im Text und auf 4 Tafeln. VII, 155 Seiten Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen DM 26,40

Inhaltsübersicht: **Umfang der Darstellung. — Grundformen der Getriebe. — Wahl der Getriebestufen. —** Übersetzung des größten Fahrganges. Der Schnellgang. Der kleinste Gang: Geschmeidigkeit. Steigfähigkeit. Beschleunigungsvermögen. — Der Rückwärtsgang. — Der Zwischengang: Geometrische Stufung. Auslegung nach den Geschmeidigkeitsschaubildern. Auslegung nach dem Beschleunigungsvermögen. Zusammenfassung zur Zwischengang-Übersetzung. — **Reine Zahnradgetriebe.** — Standgetriebe: Entwicklung. Bedienung der Schaltung. Unmittelbar von Hand geschaltete Getriebe. Schalterleichterungen. Fußschaltung. — Umlaufgetriebe: Momente, Drehzahlen, Wirkungsgrad. Formschlüssige Kupplung und Freilauf. Kraftschlüssige Bremsen und Kupplungen. Überblick über die Umlaufgetriebe, Bandbremsen. — Einige Einzelteile und ihre Berechnung: Zahnräder. Lager. Wellen. Naben. — **Föttinger-Kupplung.** — Grundgesetze der Föttinger-Kupplung. — Auslegung, Bauarten: Normale Ausführung. Störglieder-Teilentleerung. Lage der Föttinger-Kupplung in Getriebe. Leistungsverzweigung, Hydra-Matic-Getriebe. — Einfluß der Föttinger-Kupplung auf die Fahrleistungen. — Vergleich Strömungs- mit Reibungskupplung. — **Strömungswandler.** — Grundgesetze des Strömungswandlers: Bauarten der Strömungswandler. Einfacher Wandler. Einkreisläufer, dreiteilig. Einkreisläufer, vierteilig. Einkreisläufer, fünfteilig. Einkreisläufer mit Leistungsteilung. Radialwandler. — Einfluß des Strömungswandlers auf die Fahrleistungen: Zwei Grundcharakteristiken des Strömungswandlers. Vergleich zwischen Strömungswandler, Föttingerkupplung und reinem Zahnradgetriebe in bezug auf Steigfähigkeit und Beschleunigungsvermögen. Vergleich in bezug auf Brennstoffverbrauch bei Vollast. Brennstoffverbrauch bei Teillast. **Zusammenfassung. — Schrifttum. — Sachverzeichnis.**

Technische Kompositionslehre

Anleitung zu technisch-wirtschaftlichem und verantwortungsbewußtem Schaffen. Von Dr. sc. techn. **Fritz Kesselring,** Zollikon (Schweiz). Mit 162 Abbildungen. IX, 394 Seiten Gr.-8°. 1954.

Ganzleinen DM 39,—

Inhaltsübersicht: Einführende Gedanken. Erster Teil: Die allgemeinen Voraussetzungen des technischen Schaffens. I. Die ethischen Voraussetzungen des technischen Schaffens: Die Philosophie und ihre Bedeutung für eine Sinngebung der Technik. Von der Kunst als dem großen Ausgleich. Über die Lebensgestaltung des Ingenieurs. Das Verantwortungsproblem der Technik. II. Die wissenschaftlichen Voraussetzungen des technischen Schaffens: Ziele und Methoden der Wissenschaft. Von der Schönheit und dem Nutzen der Mathematik. Die Bedeutung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Einige grundsätzliche physikalische Zusammenhänge. — III. Die wirtschaftlichen Voraussetzungen des technischen Schaffens: Vom Wesen und der Bedeutung wirtschaftlicher Betrachtungen. Die Herstellkosten bestehender technischer Erzeugnisse. Die Herstellkosten in Entwicklung befindlicher Erzeugnisse. Das Problem der Rationalisierung. — Zweiter Teil: Die Grundlehren des technischen Schaffens. — IV. Erfindungslehre: Die Geschichte einiger Erfindungen. Der Weg zur Erfindung. Der Weg zum Patent. — V. Gestaltungslehre: Einige übergeordnete Gestaltungsprinzipien. Die Gestaltung mit Hilfe eines konvergierenden Näherungsverfahrens. Die Gestaltung mit Hilfe mathematischer Methoden. — VI. Formungslehre: Der Stoff und seine Veränderung durch Felder, Kräfte und Impulse. Die physikalischen Grundlagen der Formung. Die technisch-wirtschaftliche Formung von Einzelteilen und ihrer Verbindung. Anhang: Erläuterungen zu den Tafeln I bis VI. Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Gröber/Erk

Die Grundgesetze der Wärmeübertragung

Dritte, völlig neubearbeitete Auflage von Dr.-Ing. **Ulrich Grigull**, Farbenfabriken Bayer A. G., Leverkusen. Mit 190 Abbildungen. VIII, 428 Seiten Gr.-8°. 1955. Ganzleinen DM 37,50

Inhaltsübersicht: Erster Teil: **Wärmeleitung in festen Körpern.** A. Die mathematischen Grundlagen. — B. Über die Lösung von Randwertaufgaben. — C. Die zeitlich veränderlichen Temperaturfelder ohne Wärmequellen. — D. Die zeitlich konstanten Temperaturfelder ohne Wärmequellen. — E. Die zeitlich konstanten Temperaturfelder mit Wärmequellen. — F. Verschiedene Sonderfälle. — G. Wärmeleitung in verdünnten Gasen. — Zweiter Teil: **Konvektive Wärmeübertragung.** A. Flüssigkeits- und Energiebewegung. — B. Das Ähnlichkeitsgesetz der Wärmeübertragung. — C. Wärmeübergang bei erzwungener laminarer Strömung. — D. Wärmeübergang bei erzwungener turbulenter Strömung. — E. Wärmeübergang bei querangeströmten Körpern. — F. Wärmeübergang bei hohen Geschwindigkeiten. — G. Wärmeübergang bei freier Konvektion. — H. Wärmeübergang bei Kondensation. — I. Wärmeübergang bei Verdampfung. — K. Stoffübertragung. — Dritter Teil: **Wärmestrahlung.** A. Einführung. — B. Die Strahlung des schwarzen Körpers. — C. Der Strahlungsaustausch zwischen festen Körpern. — D. Strahlung von Gasen und Dämpfen. — **Anhang.** Einheiten, Umrechnungstafeln, Stoffwerte. — **Schrifttum.** — **Namen- und Sachverzeichnis.**

Der rasche Fortschritt auf dem Gebiet der Wärmeübertragung erforderte eine durchgreifende Neubearbeitung des in zweiter Auflage 1933 von Gröber und Erk herausgegebenen Buches. Der Teil „Konvektive Wärmeübertragung" wurde völlig neu geschrieben. Aber auch die beiden anderen Teile des Buches, die Wärmeleitung und die Wärmestrahlung, wurden an vielen Stellen ergänzt und auf den neuesten Stand gebracht.

Die Lehre von der konvektiven Wärmeübertragung verdankt ihren Fortschritt im wesentlichen zwei Methoden: der Anwendung der Ähnlichkeitstheorie und der Betrachtung der wandnahen Schichten als einen besonderen Teil der Strömung, also der Prandtlschen Grenzschichtlehre. Von beiden Methoden wurde in der neuen Auflage ausgiebig Gebrauch gemacht, die Ähnlichkeitstheorie wurde besonders ausführlich behandelt. Daneben wurde die Analogie zwischen Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch zu einer gemeinsamen Darstellung der drei Vorgänge benutzt, um dadurch besonders die Austauschvorgänge in turbulenter Strömung berechnen zu können. Das Buch gibt damit einen Überblick über die heute üblichen Lösungsmethoden und zeigt die erzielten Ergebnisse der Theorie. Die Verbindung zur praktischen Anwendung liefern Abschnitte über Versuchsergebnisse und Gebrauchsformeln. Gerade bei der Wärmeübertragung erfordert die richtige Anwendung einer Gleichung ein gewisses Maß von physikalischem Verständnis; daher wurde bei der Darstellung hierauf besonderer Wert gelegt. Gemäß ihrem Titel beschränkt sich auch die 3. Auflage auf die „Grundgesetze", da nur auf diese Weise das Gesamtgebiet in einem Band behandelt werden konnte.

Das Buch wendet sich in erster Linie an den Ingenieur, und zwar ebenso an den Praktiker wie an den wissenschaftlich arbeitenden. Auch der Student der höheren Semester wird das Buch als Studienhilfe heranziehen können.

Das Cross-Verfahren

Die Berechnung biegefester Tragwerke nach der Methode des Momentenausgleichs. Von Dr.-Ing. **Johannes Johannson.** Zweite, völlig umgearbeitete Auflage von Dipl.-Ing. **Günter Raczat.** Mit 161 Abbildungen und 38 Rechenbeispielen. XII, 168 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 17,40

Inhaltsübersicht: **Grundlagen:** Physikalische Deutung des Cross-Verfahrens. Aufgabenbereich. Allgemeine Vereinbarungen für Berechnungsform und Darstellung. Die wichtigsten Zeichen. Rechnerische Verfolgung der mechanischen Vorgänge. Steifigkeiten und Übertragungszahlen. Verteilungs- oder Ausgleichzahlen. Zusammengesetzte Drehsteifigkeiten. Teilverformungsbilder. — **Die allgemeine Handhabung des Cross-Verfahrens bei Durchlaufträgern und einfachen Rahmenwerken mit und ohne Stabdrehungen unter äußeren Lasten:** Allgemeine Regeln. Beispiele für einmaligen Momentenausgleich. Beispiel für die Anwendung der Cross'schen Iteration in der ausführlichen Form. Kürzere Schreibweise der Cross'schen Iteration. Beispiele für Rahmenwerke mit Stabdrehwinkeln (verschiebbaren Knoten). — **Einige Verfahren zur Abkürzung des Berechnungsganges bei Durchlaufträgern und Rahmenwerken ohne Stabdrehwinkel:** Allgemeines. Das zweistufige Verfahren nach Dasek. Umgehung der Cross'schen Iteration. — **Behandlung von Rahmenwerken mit ein- oder mehrfacher Symmetrie:** Belastungsumordnung. Ansatz der Steifigkeiten, wenn Stabdrehwinkel nicht vorhanden sind. Ansatz der Steifigkeiten, wenn Stabdrehwinkel vorhanden sind. Regeln für die Zusammensetzung der Ergebnisse bei unsymmetrischer Belastung. Beispiele. — **Ein besonderes Verfahren für eingeschossige Rahmenwerke:** Allgemeines. Beispiele. — **Die Handhabung des Cross-Verfahrens bei größeren Stockwerkrahmen, Rahmenträgern und bei Durchlaufträgern auf elastisch senkbaren Stützen:** Allgemeines. Beispiele. Durchlaufträger auf elastisch senkbaren Stützen. Durchlaufträger mit gegebenen Auflagesenkungen. Nebenspannungen in Fachwerken. — **Einfluß von Temperaturänderungen, Schwinden und Normalkräften:** Gleichmäßige Temperaturänderung. Ungleichmäßige Temperaturänderung. Einfluß von Längenänderungen durch Normalkräfte. Beispiel. **Einflußlinien:** Allgemeines. Beispiel. — **Veränderliche Trägheitsmomente:** Ausgangsmomente, Steifigkeiten, Übertragungs- und Ausgleichszahlen. Beispiele. — **Anhang:** Tabellen I—IX. — **Namen- und Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Mit einem Prospekt Springer-Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg und einem Prospekt Springer-Verlag, Wien.
Springer-Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. 57 275 4022 0,8 K. B./Z. 040.